# Abel angulaire et taubérien faible

## Leçons concernées

- ∗ **207 :** Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
- ∗ **230 :** Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
- ∗ **235 :** Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
- ∗ **241 :** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- ∗ **243 :** Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

On démontre dans ce développement deux théorèmes intéressants liés au prolongement par continuité des séries entières sur le bord de leur disque de convergence.
Dans tout ce qui suit, $\left(\sum a_n z^n\right)$ est une série entière de rayon au moins 1 de somme $f(z)$. Soit $\mathbb{D}$ la boule unité centrée en 0.

Le premier théorème remarquable est le théorème d'Abel angulaire :

**Théorème.** *Soit $\theta_0 \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Notons $\Delta_{\theta_0} = \left\{1 - \rho e^{i\theta} \in \mathbb{D} \mid \rho > 0, \theta \in [-\theta_0; \theta_0]\right\}$ (on pourrait faire un joli dessin, mais c'est chiant sur LaTeX). On suppose que $l = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ existe et est fini. On a alors le résultat :*

$$\lim_{z \longrightarrow 1, z \in \Delta_{\theta_0}} f(z) = l$$

*Démonstration.* Soit, pour $n \geq 0$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ le reste d'ordre $n$ (qui est bien défini car la série des $a_n$ est convergente). Nous allons, pour $z \in \mathbb{D}$, estimer la différence $f(z) - l$ à l'aide d'une transformée d'Abel, qui consiste à juste écrire $a_n = R_n - R_{n-1}$ pour $n \geq 1$ :

$$f(z) - l = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (z^k - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} R_k (z^k - 1) - \sum_{k=1}^{+\infty} R_{k-1} (z^k - 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} R_k (z^k - z^{k+1})$$

$$= (1 - z) \sum_{k=0}^{+\infty} R_k z^k$$

Maintenant, donnons-nous $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N, |R_n| \leq \varepsilon$. On sépare alors notre somme en deux : $f(z) - l = (1-z)\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} R_k z^k + (1-z)\sum_{k=N}^{+\infty} R_k z^k$.

Sachant que $z \in \mathbb{D}$, on obtient $|f(z) - l| \leq |1-z| \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} |R_k| + \varepsilon \frac{|1-z|}{1-|z|}$ en utilisant que $\displaystyle\sum_{k=N}^{+\infty} |z|^k = \frac{|z|^N}{1-|z|} \leq \frac{1}{1-|z|}$.

Le premier terme ne nous posera pas de problème, puisque nous allons faire tendre $z$ vers 1 (dans $\Delta_{\theta_0}$)). Ce qui risque d'être plus gênant, c'est le deuxième. On prends alors maintenant $z \in \Delta_{\theta_0}$ : $\exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0; \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}$. Ceci nous permet alors d'écrire que $|1-z| = \rho$ et $|z|^2 = 1 - 2\rho cos(\theta) + \rho^2$. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{|1-z|}{1-|z|} &= \frac{\rho}{1-|z|^2}(1+|z|) \\
&\leq \frac{2\rho}{2\rho cos(\theta) - \rho^2}
\end{aligned}$$

On utilise maintenant le fait que $cos(\theta) \geq cos(\theta_0)$ et on prends $\rho < cos(\theta_0)$. On obtient ainsi $\dfrac{|1-z|}{1-|z|} \leq \dfrac{2}{cos(\theta_0)}$.

Donc, si $\rho$ vérifie en plus $\rho < \varepsilon$, on obtient au final $|f(z) - l| \leq \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} |R_k| + \frac{2}{cos(\theta_0)}\right)\varepsilon$, et ce qui est dans la parenthèse est une quantité bornée ne dépendant pas de $z$, d'où la convergence.

$\square$

On va maintenant prouvons le théorème taubérien faible :

**Théorème.** *On suppose que la limite* $l = \lim_{x \longrightarrow 1, x<1} f(x)$ *existe et est finie, et que* $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. *Alors la série des* $\left(\sum a_n\right)$ *converge vers* $l$.

*Démonstration.* Soit $0 < x < 1$, et soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ pour $n \geq 0$. On calcule $f(x) - S_n$ :

$$\begin{aligned}
f(x) - S_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k
\end{aligned}$$

Cherchons à majorer ces deux inégalités. On a $x^k - 1 = (x-1)\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1} x^l$ soit $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k (x^k - 1)\right|$ $\leq |x-1| \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k|a_k| \leq Mn|x-1|$ où $M$ est une borne pour la suite $(na_n)_{n\geq 0}$ qui est bornée car convergente vers 0 par hypothèse.

Pour le deuxième terme, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n}|x|^k$. On va maintenant se donner $\varepsilon > 0$ et choisir $n \geq 0$ tel que $\forall k \geq n, k|a_k| < \varepsilon^2$ (ce qui est possible par hypothèse). Donc, on peut majorer cette somme par $\frac{\varepsilon^2}{n}\frac{1}{1-x}$.

Etant donné ce que nous avons, il semble souhaitable de "remplacer" $x$ par $1 - \frac{\varepsilon}{n}$. On regarde donc :

$$|f(1 - \frac{\varepsilon}{n}) - S_n| \leq M\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(M+1)$$

Or, par hypothèse, il existe $N \geq 0$ tel que pour $n \geq N$, $|f(1 - \frac{\varepsilon}{n}) - l| \leq \varepsilon$.

Au final, par inégalité triangulaire, et pour $n$ choisit de cette façon, on obtient $|S_n - l| \leq \varepsilon(M+2)$. Donc $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = l$. $\square$

**Remarques :**

— Je vous conseille, pour être dans les temps, de ne pas tout écrire. La preuve est, comme vous pouvez le voir, assez lourde et gourmande en "il existe un truc tel que pour tout bidule ...". Préconisez plutôt ce genre de remarques à l'oral, on se comprends.

— Le théorème taubérien fort énonce le même résultat, mais pour $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. La preuve n'est pas spécialement très difficile, mais est assez différente de celle que nous venons de faire.