Théorème d'Ascoli

Leçons concernées

* **201 :** Espaces de fonctions. Exemples et applications
* **203 :** Utilisation de la notion de compacité.

Réference

* *Bernis - Analyse pour l'agrégation de mathématiques*

Rappels : Le développement suivant admet deux choses : le fait que tout compact soit séparable, et le théorème de Heine version équicontinue. Voir à la fin pour plus de détails.

Théorème. *Soit (K, d) un espace métrique compact, et soit A une partie de $C^0(K, \mathbb{C})$ muni de la norme de la convergence uniforme.*

Alors A est relativement compact si et seulement si A est borné et équicontinue.

Démonstration. On commence par le sens direct. Si A est relativement compact, $\overline{A}$ est compact et en particulier A est borné.

Pour montrer l'équicontinuité, soient $\varepsilon > 0$ et $x \in K$. On a $\overline{A} \subset \bigcup_{f \in A} \mathcal{B}(f, \varepsilon/3)$. Donc, par compacité, il existe $f_1, ..., f_n$ dans A tels que $\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(f_i, \varepsilon/3)$. On sait que les $f_1, ..., f_n$ sont continues sur K compact, donc uniforméments continues par le théorème de Heine. Donc $\forall i \in [\![1; n]\!], \exists \delta_i, \forall y_1, y_2 \in K, d(x, y) < \delta_i \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon/3$. On pose alors $\delta = \min \delta_i$.

Montrons que ce δ convient pour ce que nous voulons. Soit $y \in K$ tel que $d(x, y) < \delta$. Soit $f \in A$. Il existe i tel que $f \in \mathcal{B}(f_i, \varepsilon/3)$. Par inégalité triangulaire :

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \leq \varepsilon$$

par ce qui précède. δ ne dépendant pas de f, nous avons bien que A est équicontinue.

Réciproquement, notons M une borne de A. Soit (f_n) une suite de A. Nous allons montrer qu'elle admet une sous-suite convergente (dans $\overline{A}$). Pour cela, soit (x_n) une suite dense de K, qui est compact donc séparable.

La stratégie est de trouver une sous-suite de (f_n) qui converge lorsqu'on applique la suite en chacun des x_i. On va pour cela utiliser le *procédé d'extraction diagonale* (qu'on peut éventuellement admettre ici).

Pour cela, remarquons déjà que $(f_n(x_1))$ est borné, par M. On en déduit qu'il existe une extractrice φ_1 telle que $(f_{\varphi_1(n)}(x_1))$ converge. Par réccurence, pour tout k entier, on construit des extractrices $\varphi_1, ..., \varphi_k$ telles que $(f_{\varphi_1 \circ ... \circ \varphi_k(n)}(x_k))$ converge. En particulier, cette sous-suite de (f_n) converge aussi si on l'évalue en $x_1, ..., x_{k-1}$ (puisqu'on a des sous-suites de suites convergentes). Pour autant, nous aimerions trouver une extractrice φ qui fait que $(f_{\varphi(n)})$ va converger en chacun des x_i, avec cette fois-ci φ indépendant de i.

L'astuce est alors de poser $\varphi(n) = \varphi_1 \circ ... \circ \varphi_n(n)$. Il n'est pas tout à fait trivial que cette fonction ainsi définie est bien une extractrice, c'est-à-dire une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même. Pour cela, on calcule $\varphi(n+1) - \varphi(n)$, et on utilise deux choses : $\varphi_{n+1}(n+1) \geq n+1$ (se démontre aisément par récurrence lorsqu'on a une extractrice) et une composée de fonctions strictements croissantes est strictement croissante.

C'est donc une extractrice, et on vérifie en effet que $\forall i, (f_{\varphi(n)}(x_i))$ converge (car à partir d'un certain rang, à i fixé, on obtient une sous-suite d'une suite convergente).

On montre maintenant que $(f_{\varphi(n)})$ satisfait le critère de Cauchy uniforme. On prends pour cela $\varepsilon > 0$. A est équicontinue, donc uniformément équicontinue par le théorème de Heine version équicontinue :

$$\exists \delta > 0, \forall x, y \in K, d(x,y) < \delta \Rightarrow \forall f \in A, |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$$

On a $K \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} \mathcal{B}(x_i, \delta)$ par densité, et donc, par compacité de K, il existe $i_1, ..., i_r$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^{r} \mathcal{B}(x_{i_k}, \delta)$.

Prenons maintenant $x \in K$ quelconque. Alors il existe k tel que $x \in \mathcal{B}(x_{i_k}, \delta)$. On a par inégalité triangulaire :

$$\forall p, q, |f_{\varphi(p)}(x) - f_{\varphi(q)}(x)| \leq |f_{\varphi(p)}(x) - f_{\varphi(p)}(x_{i_k})| + |f_{\varphi(p)}(x_{i_k}) - f_{\varphi(q)}(x_{i_k})| + |f_{\varphi(q)}(x_{i_k}) - f_{\varphi(q)}(x)|$$

Par l'uniforme continuité, on a automatiquement que le premier et le troisième sont majorés par $\varepsilon/3$. Quant au deuxième terme, $(f_{\varphi(n)}(x_{i_k}))$ est de Cauchy car convergente. Donc pour p et q plus grand qu'un certain N_i, on peut aussi majorer ce terme par $\varepsilon/3$. A priori, N_i dépends de x_{i_k}, et donc de x. Mais puisque les x_{i_k} considérés sont en nombre fini, on peut prendre $N = \max N_i$ qui convient. Ainsi, pour p et q plus grand que N, qui est indépendant de x, on peut majorer par ε. On peut ainsi prendre la norme infinie, et conclure en utilisant le fait que l'ensemble des fonctions continues sur un combat est complet.

□

Quelques remarques :
Le fait que K soit séparable provient du fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, K \subset \bigcup_{x \in K} \mathcal{B}(x, 1/n)$. Par compacité, il existe un ensemble fini I_n tel que $K \subset \bigcup_{x \in I_n} \mathcal{B}(x, 1/n)$. Donc en prenant l'union des I_n, on obtient un ensemble dénombrable, en tant qu'union dénombrable d'ensembles finis, et on peut l'indexer sur une suite qui va effectivement vérifier ce qu'on demande, puisque $1/n \longrightarrow 0$.

Concernant le théorème de Heine version équicontinue, il s'énonce comme suit :

Théorème. *Soit A une partie de l'ensemble des fonctions continues sur un compact, à valeurs dans $\mathbb{C}$. A est équicontinue si et seulement si il est uniformément équicontinue, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in K, \forall f \in A, d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

C'est donc la version "uniforme" de l'équicontinuité, comme pour la continuité et l'uniforme continuité. Et, comme dans le théorème de Heine classique, on a cette équivalence.

Le sens réciproque est trivial. Pour le sens direct, soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\forall x \in K, \exists \delta_x > 0, \forall f \in A, \forall y \in K, d(x,y) < \delta_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

par équicontinuité. On a alors : $K \subset \bigcup_{x \in K} \mathcal{B}(x, \delta_x/2)$. Donc par Borel-Lebesgue, il existe $x_1, ..., x_n$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(x_i, \delta_{x_i}/2)$. On prends alors $\delta = \min \delta_i/2$. Si $d(x,y) < \delta$, et si $x \in \mathcal{B}(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}}/2)$, on a par inégalité triangulaire $d(x_{i_0}, y) < d(x, x_{i_0}) + d(x,y) < \delta_{x_{i_0}}$. Donc, par inégalité triangulaire, on en déduit le résultat.