Equation de la chaleur sur le cercle

Leçons concernées

- **209 :** Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.
- **222 :** Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.
- **234 :** Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.
- **239 :** Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
- **241 :** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- **246 :** Séries de Fourier. Exemples et applications.

Réference

- *Candelpergher - Calcul intégral*

Nous allons nous intéresser à une célèbre équation issue de la physique : l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Ici, nous allons nous intéresser plus particulièrement à l'équation :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \\ u(0;t) & = & u(2\pi;t) & \forall t > 0 \\ u(x;0) & = & u_0(x) & \forall x \in [0;2\pi] \end{array}\right.$$

où on s'est donné $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $u_0(0) = u_0(2\pi)$.
Le contexte est le suivant ; nous avons une tige de longueur 2π (en réalité la longueur peut être quelconque tant qu'elle est finie, mais puisque nous allons utiliser les séries de Fourier, 2π sera plus commode dans la preuve), et nous connaissons une température initiale u_0 imposée par une source de chaleur, au centre de la barre par exemple (du moment en fait que les extrémités soient à la même température). Ainsi, la température u vérifie ce système, à tout temps et à tout lieu sur la barre.

La deuxième ligne nous invite à plutôt nous intéresser à des applications dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dans ce développement, nous allons alors nous intéresser au problème en considérant une application u définie sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times]0;+\infty[$ et telle que $\forall t > 0, u(.;t) \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. En particulier, la troisième condition devient $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} ||u(x;t) - u_0(x)||_2 = 0$. On a alors le théorème suivant :

Théorème. *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Alors il existe une unique application $u : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times]0;+\infty[$ de classe C^2 telle que $\forall t > 0, x \longmapsto u(x;t) \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ vérifiant l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} ||u(x;t) - u_0(x)||_2 = 0$.*

Démonstration. Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

Analyse : Soit u une solution au problème. En particulier, u est de classe C^1 par rapport à x à tout temps. Sa série de Fourier converge alors normalement, et coïncide avec la fonction. Nous pouvons alors écrire :

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, u(x;t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

où les $c_n(t)$ sont les coefficients de Fourier. Explicitons-les : $c_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(x,t)e^{-inx}dx$. Puisque nous voulons utiliser le fait que u est solution de l'équation de la chaleur, nous souhaitons appliquer un théorème de dérivation sous l'intégrale. Il n'y a aucun soucis à vérifier les hypothèses, puisque nous intégrer une fonction régulière sur un intervalle fermé borné. Le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique alors, et, en effectuant deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
c_n'(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(x;t)e^{-inx}dx \\
c_n'(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x;t)e^{-inx}dx \\
c_n'(t) &= \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(x;t)e^{-inx}dx \\
c_n'(t) &= -\frac{n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x;t)e^{-inx}dx \\
c_n'(t) &= -n^2 c_n(t)
\end{aligned}$$

On peut bien sûr cette équation pour avoir $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$. Pour avoir la constante c_n^0, nous allons utiliser la limite et le théorème de Fourier-Plancherel qui donne un isomorphisme isométrique entre $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ et $l^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Ainsi, la limite devient, par Fourier-Plancherel, $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} ||(c_n(t)) - (c_n(u_0))||_{l^2} = 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} c_n(t) = c_n(u_0)$ soit $c_n^0 = c_n(u_0)$.

Au final, $c_n(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u_0(\xi)e^{-in\xi}e^{-n^2 t}d\xi$ ce qui donne :

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} u_0(\xi)e^{-in\xi}e^{-n^2 t}d\xi \; e^{inx}$$

On souhaite inverser somme et intégrale. On remarque pour cela que, d'après le théorème de Fubini-Tonelli, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^{2\pi}|u_0(\xi)|d\xi\right)\; e^{-n^2 t} < +\infty$ puisque $e^{-n^2(t)}$ est dominé par $\frac{1}{n^2}$ car $t > 0$. On peut ainsi écrire :

$$u(x,t) = \int_0^{2\pi} u_0(\xi)\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in(x-\xi)}e^{-n^2 t}\right)d\xi$$

Appelons ce terme entre parenthèse $K(x-\xi;t)$. On obtient alors $u(x;t) = (u_0 * K(.,t))(x)$ d'où l'unicité de l'éventuelle solution. K est appelée noyau de la chaleur.

Synthèse : Définissons alors u par ce produit de convolution, qui est bien définie car u_0 et $K(.,t)$ sont des fonctions de carré intégrables pour tout $t > 0$. Vérifions que u est solution de notre problème.

Montrons tout d'abord que K est C^∞. On prends alors k et l deux entiers, et, en posant $K_n(x;t) = e^{inx}e^{-n^2t}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, on observe que $\forall x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \forall t > a > 0$:

$$\left|\frac{\partial^{k+l}K_n}{\partial x^k \partial t^l}(x;t)\right| = |n|^{2l+k}e^{-n^2t} \leq |n|^{2l+k}e^{-n^2a}$$

et ce membre de droite est sommable puisque $a > 0$, d'après les croissances comparées. Par théorème de dérivation sous le signe somme, K est donc C^∞ et on vérifie que $\dfrac{\partial K}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 K}{\partial x^2}$.

Montrons maintenant que u est C^∞. On a $u(x;t) = \displaystyle\int_0^{2\pi} u_0(\xi)K(x-\xi;t)d\xi$. On applique à nouveau un théorème de dérivation sous l'intégrale, et en remarquant que u_0 est intégrable (puisque de carré intégrable sur un domaine borné, par inégalité de Cauchy-Schwarz), u est C^∞ (on observe en particulier l'effet régularisant de l'équation de la chaleur : on cherchait une solution C^2, et on obtient une solution C^∞ !) et u est alors solution de l'équation de la chaleur, puisque K est solution de même.

Il ne reste qu'à montrer le résultat de la limite. On va pour cela à nouveau s'appuyer sur le théorème de Fourier-Plancherel. En reprenant les calculs à la fin de l'analyse, on obtient $c_n(t) = c_n(u_0)e^{-n^2t}$ (il suffit d'intervertir somme et intégrale, qui a été justifié précédemment, et on a directement l'écriture de $u(.,t)$ dans la base hilbertienne $(e^{inx})_n$).

On a $||(c_n(t)) - (c_n(u_0)||_{l^2}^2 = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |e^{-n^2t} - 1|^2 c_n(u_0)^2$.

Or, le membre dans la somme converge simplement vers 0, et pour $t > 0, |e^{-n^2t} - 1|^2 c_n(u_0)^2 \leq 4c_n(u_0)^2$ qui est sommable. On peut alors passer à la limite quand t tends vers 0, et on obtient bien la limite comme convenue, par Fourier-Plancherel, ce qui achève ce théorème.

$\square$