Dimension du commutant

Leçons concernées

- **125 :** Extensions de corps. Exemples et applications.
- **151 :** Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- **162 :** Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Tous les corps considérés dans ce développement sont commutatifs.

Soient $\mathbb{K}$ un corps et soit A une matrice sur ce corps de taille $n \geq 2$. Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A)$ le commutant de A sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire toutes les matrices sur $\mathbb{K}$ qui commutent avec A.
On a déjà, de façon évidente, $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A)$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait l'inclusion réciproque.

Théorème. *On a égalité si et seulement si $\mu_A = \chi_A$ où μ_A est le polynôme minimal de A, et χ_A son polynôme caractéristique.*

Pour la preuve de ce théorème, nous allons tout d'abord démontrer le lemme suivant :

Lemme. *$dim\ \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A) \geq n$.*

Démonstration. Commençons par le cas le plus simple, le cas où A est trigonalisable. Dans ce cas, quitte à changer de base, on peut considérer que A soit un élément de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure.
Intéressons nous alors à $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A) \cap \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$. Si X est triangulaire supérieure, c'est un élément du commutant si et seulement si $AX - XA = 0$ ce qui donne $\dfrac{n(n+1)}{2}$ équations. Cependant, les équations données par la diagonale sont toujours vérifiées, puisqu'on a prit X et A triangulaires supérieures. Ce qui fait alors $\dfrac{n(n+1)}{2} - n$ équations pour $\dfrac{n(n+1)}{2}$ inconnues soit $dim\ \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A) \geq dim\ \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A) \cap \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \geq n$.

Intéressons-nous au cas général. Pour cela, il suffirait de prendre une extension de corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ sur lequel χ_A est scindé, et donc sur lequel A est trigonalisable. Cependant, rien ne nous garantie a priori qu'on préserve la dimension du commutant. Nous allons alors démontrer que si $\mathbb{L}$ est une extension finie de $\mathbb{K}$, alors $dim\ \mathcal{C}_{\mathbb{L}}(A) = dim\ \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A)$.

Soit alors $(a_1, ..., a_r)$ une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{L}$ et soit $M_1, ..., M_p$ une base de $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A)$. Nous allons alors montrer que c'est aussi une base de $\mathcal{C}_{\mathbb{L}}(A)$.

Génératrice : Soit M une matrice de $\mathcal{C}_{\mathbb{L}}(A)$. Alors, on écrit les coefficients $M_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \mu_{ij}(k) a_k$ dans la base $(a_1, ..., a_r)$ (en d'autres termes $\mu_{ij}(k) \in \mathbb{K}$ pour tout k, i, j). Si on pose $\mu(k) = (\mu_{ij}(k)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ceci donne $M = \sum_{k=1}^{r} a_k \mu(k)$.

On va alors montrer qu'en fait $\mu(k) \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A)$. En effet, nous avons déjà $MA - AM = 0$ ce qui donne $\sum_{k=1}^{r} a_k(\mu(k)A - A\mu(k)) = 0$. Or, la famille $a_1, ..., a_r$ est libre sur $\mathbb{K}$. Donc, si on écrit chacune des relations données par cette somme (c'est une somme de matrices !), chaque coefficients de cette matrice est nulle, et alors, par liberté, ceci donne nécessairement $\mu(k)A - A\mu(k) = 0$.

Ainsi, nous avons $\mu(k) \in Vect_{\mathbb{K}}(M_1, ..., M_p)$ pour tout k. Donc $M \in Vect_{\mathbb{L}}(M_1, ..., M_p)$ d'après l'égalité liant M et les $\mu(k)$, ce qui prouve le caractère générateur.

Libre : Supposons qu'il existe $b_1, ..., b_p \in \mathbb{L}$ tels que $\sum_{k=1}^{p} b_k M_k = 0$. On écrit, $b_k = \sum_{i=1}^{r} b_{ki} a_i$ dans la base $a_1, ..., a_r$ de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$. Ceci donne alors au final : $\sum_{i=1}^{r} a_i \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki} M_k \right) = 0$. Donc, à nouveau, en écrivant chacune des relations données par cette égalité de matrices, on doit nécessairement avoir $\sum_{k=1}^{p} b_{ki} M_k = 0$ soit $b_{ki} = 0$ pour tout k et i puisque $M_1, ..., M_p$ est libre sur $\mathbb{K}$.

Ainsi, $(M_1, ..., M_p)$ est libre et génératrice sur $\mathbb{L}$, c'est donc une base et on a alors égalité des dimensions.

Ainsi, si on prends $\mathbb{L}$ l'extension de décomposition de χ_A sur $\mathbb{K}$, qui est bien une extension finie, on a bien le résultat.

$\square$

On peut alors montrer le théorème. Tout d'abord, Si $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A) = \mathbb{K}[A]$, alors $n \geq deg\ \mu_A = dim\ \mathbb{K}[A] \geq n$ d'après le lemme. Donc $deg\ \mu_A = n = deg\ \chi_A$ et alors, puisque μ_A divise χ_A d'après Cayley-Hamilton, et qu'ils sont unitaires, nous avons $\mu_A = \chi_A$.

Réciproquement, si on a égalité, alors A est cyclique : il existe x un vecteur de $\mathbb{K}^n$ tel que $(x, Ax, ..., A^{n-1}x)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$. On pose alors φ l'application définie sur $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A)$ par : $\varphi(B) = Bx$. Alors, puisqu'on travaille sur le commutant de A, B est un élément du noyau de φ si et seulement si B s'annule sur la base donnée par x, et donc si et seulement si $B = 0$. φ est donc injective, donc $dim\ \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A) \leq n$. Mais d'après le lemme, on a aussi l'inégalité inverse. Donc la dimension est n, et donc le degré de μ_A est n. Donc, par égalité des dimensions, et toujours par Cayley-Hamilton, $\mu_A = \chi_A$ car les polynômes sont unitaires, ce qui prouve le théorème.