Projection sur un convexe fermé

Leçons concernées

* **205 :** Espaces complets. Exemples et applications.
* **208 :** Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
* **213 :** Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
* **253 :** Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Réference

* *Hirsch-Lacombe* - *Analyse fonctionnelle*

On démontre le fameux théorème de projection sur un convexe fermé :

Théorème. *Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $P_C(x) \in C$ tel que $d(x,C) = \inf\limits_{y \in C} ||x-y|| = ||x - P_C(x)||$. C'est le projeté de x sur C.*
De plus, il est caractérisé par la proposition : $\forall z \in C, Re(< P_C(x) - x | P_C(x) - z >) \leq 0$.

Démonstration. Commençons par prouver l'existence du projeté. Pour cela, soit (y_n) une suite minimisante de C pour cette borne inf (garantie par la caractérisation séquentielle de la borne inf) : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} ||x - y_n|| = d(x,C)$, distance que nous noterons d.

Montrons que cette suite est convergente dans C. Puisque nous sommes dans un Hilbert, on va montrer qu'elle est de Cauchy. On utilise l'identité du parallélogramme : $||a-b||^2 + ||a+b||^2 = 2||a||^2 + 2||b||^2$ qu'on réécrit $||\frac{a-b}{2}||^2 + ||\frac{a+b}{2}||^2 = \frac{1}{2}(||a||^2 + ||b||^2)$. Pour p et q deux entiers, on a, en appliquant cette égalité avec $a = x - y_p$ et $b = x - y_q$:

$$||x - \frac{y_p + y_q}{2}||^2 + ||\frac{y_p - y_q}{2}||^2 = \frac{1}{2}(||x - y_p||^2 + ||x - y_q||^2) \underset{p,q \to +\infty}{\longrightarrow} d^2$$

Or, $\frac{y_p + y_q}{2} \in C$ par convexité et donc, par définition de la borne inf, $||x - \frac{y_p + y_q}{2}||^2 \geq d^2$. Donc, $\lim\limits_{p,q \to +\infty} ||\frac{y_p - y_q}{2}||^2 \leq 0$ soit $\lim\limits_{p,q \to +\infty} ||y_p - y_q|| = 0$. Donc, cette suite est de Cauchy, donc convergente vers un y qui est dans C, puisque ce dernier est fermé. On a ainsi $d(x,c) = ||x - y||$ par passage à la limite.

Cherchons tout de suite une propriété caractérisant "un" projeté. On se donne $z \in C$ et $t \in [0;1]$. Calculons :

$$d^2 \geq ||x - (tz + (1-t)y)||^2 = ||x - y + t(y-z)||^2 = ||x-y||^2 + 2tRe(< x-y, y-z >) + t^2||y-z||^2$$

$$\Rightarrow d^2 \geq d^2 + 2tRe(< x-y, y-z >) + t^2||y-z||^2$$

Donc, en divisant par $t > 0$ et en faisant tendre t vers 0, on obtient la propriété recherchée : $Re(< y - x, y - z >) \leq 0$.

Réciproquement, montrons que si y vérifit cette propriété, alors $d = ||x - y||$. On prends alors $z \in C$ et alors :

$$||x - z||^2 = ||x - y + y - z||^2 = ||x - y||^2 - 2Re(< y - x, y - z >) + ||y - z||^2 \geq ||x - y||^2$$

z étant quelconque dans C, nous avons bien que y réalise la plus courte distance entre x et C.
Ainsi, cette propriété permet de caractériser "un" projeté. Supposons que $z \in C$ soit un autre projeté. On a alors, d'après cette propriété appliquée à y et à z :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Re(< y - x, y - z >) & \leq & 0 \\ Re(< z - x, z - y >) & \leq & 0 \end{array} \right.$$

En additionnant ces deux inégalités, on trouve alors $Re(< y - z, y - z >) \leq 0$ soit $||y - z||^2 = 0$ et donc $y = z$. L'existence et l'unicité est alors démontré, et on note $P_C(x) = y$.

□

Voyons un cas particulier intéressant. Ce cas particulier, il s'agit de celui où $C = F$ est un sous-espace vectoriel fermé de H. Les hypothèses sont vérifiées, bien-sûr, puisque F est convexe, et fermé par hypothèse. Donc tout x dans H admet un unique projeté $P_C(x) \in F$, caractérisé par : $\forall z \in F, Re(< P_C(x) - x, P_C(x) - z >) \leq 0$.

Mais, en faisant le changement de variable $z \longmapsto P_C(x) - z$ (on est dans un espace vectoriel), ceci devient $\forall z \in F, Re(< P_C(x) - x, z >) \leq 0$.
Avec $z \longmapsto -z$, on a l'inégalité inverse et donc $\forall z \in F, Re(< P_C(x) - x, z >) = 0$.
Si on est dans un espace de Hilbert réel, on peut déjà s'arrêter là. Sinon, si on est dans le cas complexe, on fait le changement de variable $z \longmapsto iz$ qui permet alors de transformer la partie réelle en partie imaginaire. On obtient alors $Im(< P_C(x) - x, z >) = 0$ pour tout z dans F, et donc $< P_C(x) - x, z >= 0$ pour tout z dans F.

Ainsi, $P_C(x)$ est caractérisé par : $P_C(x) - x \in F^{\perp}$. Cette propriété est fondamentale, car l'écriture $x = P_C(x) + x - P_C(x)$ permet d'en conclure que $H = F \oplus F^{\perp}$, et le projeté de $x \in H$ sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est $P_C(x)$.

Une application fondamentale est le théorème de représentation de Riesz :

Application : Soit f une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique $a \in H$ tel que $f =< a, . >$ (si on met la linéaire du produit scalaire à droite).

Démonstration. Si f est nulle, c'est trivial ($a = 0$ convient, et c'est le seul, en regardant l'image de $x = a$). Supposons f non nul. Alors $Ker(f)$ est un hyperplan fermé de H. En appliquant le théorème de projection, on écrit alors $H = Ker(f) \oplus Vect(a)$ où a est un certain vecteur de H tel que $||a|| = f(a) = 1$ (quitte à diviser par $f(a)$ ou $||a||$ si besoin). Alors, si on écrit $x = y + \lambda a$ avec $y \in Ker(f)$ et λ un scalaire, on obtient $f(x) = \lambda =< x, a >$ d'où l'existence. L'unicité provient du fait que si $f(x) =< x, b >$ avec b un certain élément de H, alors $a - b \in H^{\perp} = \{0\}$ soit $a = b$.

□

Ceci achève alors ce développement.

Remarques :

— La caractérisation avec la partie réelle peut s'illustrer dans le cas réel. On dessine pour cela un convexe dans le plan, et on interprète l'inégalité avec le produit scalaire géométriquement.

- Le théorème de projection sur un convexe fermé donne un isomorphisme entre H et son dual H^* qui a le bon goût d'être canonique.
- Dans le cas où F est de dimension fini, une façon pratique de calculer le projeté sur F est d'utiliser la caractérisation suivante de $P_C(x)$:

$$\begin{cases} P_C(x) \in F \\ (P_C(x) - x) \perp F \end{cases}$$

  Si F est de dimension n, ceci donne alors un système de n équations à n inconnues.