Sous-groupes distingués et caractères

Leçons concernées

- $*$ **103 :** Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
- $*$ **107 :** Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.

Le but de ce développement est de faire le lien entre la table de caractère, et le caractère simple d'un groupe fini G.

Si χ est un caractère, on définit :

$$K_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$$

Lemme. *Pour tout caractère χ de G, K_χ est un sous-groupe distingué de G.*

Démonstration. Soit (ρ, V) une représentation ayant pour caractère χ. On va montrer qu'on a en fait $Ker\ \rho = K_\chi$. Ce faisant, puisque ρ est un morphisme de groupe, on aura automatiquement que K_χ est un sous-groupe distingué de G. L'inclusion directe étant triviale, intéressons-nous à la réciproque. Soit $g \in G$ vérifiant $\chi(g) = \chi(1)$. Cherchons une façon de calculer ces quantités.

On remarque pour cela que $\rho(g)$ est un endomorphisme diagonalisable, car il est annulé par un polynôme scindé à racines simples : $X^{|G|} - 1$. Donc, le caractère de g, qui est la trace de cet endomorphisme, est la somme des valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ qui sont en plus des racines $|G|$−ème de l'unité. On a alors :

$$|\chi(g)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| = n = \chi(1)$$

Or, les deux termes extrémaux de cette inégalité sont égaux. On a donc égalité triangulaire, et donc $\forall i \neq j, \exists \varepsilon > 0, \lambda_i = \varepsilon \lambda_j$. Puisque les valeurs propres sont des racines de l'unité, et donc sont de module 1, on a $\varepsilon = 1$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$, et la somme vaut n. On ne peut donc qu'avoir $\lambda_i = 1$ pour tout i, soit $\rho(g) = id$ et donc $g \in Ker\ \rho$, ce qui prouve l'égalité.

□

Passons maintenant au théorème central de ce développement :

Théorème. *Soient $\chi_1, ..., \chi_p$ les caractères irréductibles de G. Alors les sous-groupes H distingués sont exactement ceux de la forme :*

$$H = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$$

où $I \subset [\![1; p]\!]$.

Démonstration. Remarquons qu'effectivement tous les groupes de cette forme sont bien distingués dans G, en tant qu'intersection de sous-groupes distingués d'après le lemme. Réciproquement, soit H un sous-groupe distingué de G. On peut alors considérer le groupe quotient G/H. Soit $\widetilde{\rho}$ sa représentation régulière.

On ramène ceci à une représentation $\rho = \widetilde{\rho} \circ \pi$ de G avec $\pi : G \longrightarrow G/H$ la projection canonique. Puisque la représentation régulière est fidèle, $Ker\ \rho = Ker\ \pi = H$. Soit χ le caractère de cette représentation, qu'on écrit en somme de caractères irréductibles : $\chi = \sum_{i=1}^{p} m_i \chi_i$. Alors, pour tout $g \in G$:

$$|\chi(g)| \leq \sum_{i=1}^{p} m_i |\chi_i(g)| \leq \sum_{i=1}^{p} m_i \chi_i(1) = \chi(1)$$

où on a utilisé $\forall i, |\chi_i(g)| \leq \chi_i(1)$ qui se démontre de la même façon que la preuve du lemme. Ainsi, en remarquant que $Ker\ \rho = K_\chi$, $g \in H$ si et seulement si ces inégalités sont des égalités, et donc si et seulement si pour tout i, $m_i \chi_i(g) = m_i \chi_i(1)$. Si $m_i = 0$, on a toujours égalité quel que soit g. Si $m_i \neq 0$, cela revient à demander $g \in K_{\chi_i}$. On a alors :

$$H = \bigcap_{m_i \neq 0} K_{\chi_i}$$

ce qui démontre notre théorème.

□

Passons alors à un corollaire remarquable, qui nous permettra de lire les sous-groupes distingués de G sur sa table de caractère :

Corollaire. *G est simple si et seulement si pour tout caractère irréductible non trivial χ, $\chi(g) \neq \chi(1)$ dès que $g \neq 1$.*

Démonstration. Si G est simple, soit χ un caractère irréductible non trivial. Alors K_χ est un sous-groupe distingué de G qui est distinct de G, puisque χ n'est pas trivial. Donc nécessairement, par simplicité de G, $K_\chi = \{1\}$, donc $\chi(g) \neq \chi(1)$ dès que $g \neq 1$.

Réciproquement, soit H un sous-groupe distingué de G distinct de G. Alors il existe une partie I de $[\![1; p]\!]$ tel que $H = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$. Puisque H est distinct de G, cette intersection n'est pas uniquement composée du noyau du caractère trivial, sinon sans quoi $H = G$. Soit alors $i_0 \in I$ tel que χ_{i_0} soit non trivial. Alors $K_{\chi_{i_0}} = \{1\}$ par hypothèse, et alors $H = \{1\}$ ce qui prouve que G est simple, et donc le théorème.

□

Remarques :

— Implicitement, nous avons vu que $\chi(g) = \chi(1)$ si et seulement si $|\chi(g)| = \chi(1)$, ce qui n'est pas tout à fait trivial ; le membre de droite est bien un entier (c'est le degré de la représentation), mais le membre de gauche est a priori un nombre complexe, donc prendre le module peut changer l'égalité. Ce qui nous permet d'affirmer ça, c'est l'égalité triangulaire dans le lemme : si $|\chi(g)| = \chi(1)$, on a égalité triangulaire et donc $\rho(g) = id$ et donc $\chi(g) = \chi(1)$.

— Ce corollaire remarquable peut être illustré sur certains groupes. Par exemple, on peut y lire la simplicité de A_5, et la non simplicité de A_4, et même trouver tous les sous-groupes distingués de ce dernier.