Décomposition de Dunford et exponentielle de matrice

Leçons concernées

* **153 :** Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
* **154 :** Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
* **155 :** Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
* **156 :** Exponentielle de matrices. Applications. (techniquement justifiable, mais je le déconseillerais)
* **157 :** Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Réference

* *Rombaldi - Mathématiques pour l'agrégation*

Théorème. *Soit E un espace vectoriel de dimension fini n. Soit $u \in \mathcal{E}$ un endomorphisme tel que son polynôme caractéristique χ_u soit scindé.*
Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que $u = d + n$, d diagonalisable, n nilpotent, et d et n commutent. De plus, d et n sont des polynômes en u.

Preuve : On écrit $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m(\lambda_k)}$ et on note $N_k = Ker(u - \lambda_k id)^{m(\lambda_k)}$ le sous-espace caractéristique de u associé à λ_k, qui est un sous-espace stable par u. Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, et le théorème de décomposition des noyaux, on a $E = \bigoplus_{k=1}^{r} N_k$, et les projections π_k sur chacun de ces termes sont des polynômes en u. Il suffit alors de définir d et n sur chacun des termes de cette somme directe.

Or, pour $k \in [\![1; r]\!]$, sur N_k, on a $(u_{|N_k} - \lambda_k id_{N_k})^{m(\lambda_k)} = 0$. Ceci nous amène alors à poser $n_k = u \circ \pi_k - \lambda_k id_{N_k}$, qui est nilpotent d'après ce qui précède, et $d_k = \lambda_k id_{N_k}$. Alors $u_{|N_k} = d_k + n_k$, et d_k et n_k commutent.
On définit alors $d = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \pi_k$ et $n = u - d = \sum_{k=1}^{r} n_k \circ \pi_k$. Ce sont alors des polynômes en u, qui commutent alors, et qui vérifient $u = d + n$. De plus, d est diagonalisable, car diagonale dans une base adaptée à la somme directe précédente, et si $M = max\ m(\lambda_k)$, alors $n^M = 0$. L'existence de la décomposition de Dunford est alors vérifiée.

Pour l'unicité, supposons alors qu'il existe une autre décomposition de Dunford $u = d' + n'$. Alors $d - d' = n' - n$.

Tout d'abord, d et d' commutent. En effet, d est un polynôme en u d'après ce qui précède, et $u = d' + n'$, avec n' qui commute avec d' par hypothèse. Donc d' commute avec u, et donc avec d. d et d' sont donc diagonalisables, et commutent. Ils sont donc codiagonalisables, et on peut alors les diagonaliser dans une même base. En particulier, $d - d'$ est diagonalisable.

Ensuite, $n' - n$ est nilpotent. En effet, de la même façon que précédemment, n' et n commutent aussi. Puisqu'ils sont nilpotents, soit M entier naturel non nul tel que $n^M = n'^M = 0$. Alors, en écrivant le binôme de Newton (on peut puisque n et n' commutent), on trouve $(n' - n)^{2M} = 0$.

En conséquence, $n' - n$ est diagonalisable, et nilpotent. Il ne peut donc qu'être nul. Donc $n' = n$ et $d' = d$ ce qui prouve l'unicité.

Application : On se place ici sur un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, afin de travailler avec l'exponentielle de u, noté e^u.
Alors u est diagonalisable si et seulement si e^u l'est.

Le sens direct est trivial. Réciproquement, supposons e^u diagonalisable, et écrivons $u = d+n$ la décomposition de Dunford de u. Puisque d et n commutent, nous avons $e^n = e^u e^{-d}$. En particulier, e^u et e^{-d} sont diagonalisables et commutent, donc sont codiagonalisables. e^n est donc lui aussi diagonalisable. Soit k le plus petit entier non nul tel que $n^k = 0$, de sorte que X^k soit le polynôme minimal de n. On écrit alors : $e^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} n^i$. Donc $e^n - id = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} n^i = nP(n)$ en factorisant par n où $P(n)$ est un polynôme en n. En particulier, n et $P(n)$ commutent. Donc $e^u - id$ est nilpotent, et diagonalisable (toujours par le même argument de codiagonalisation), donc est nul. Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} X^i$ est un polynôme annulateur de n, et est alors divisible par X^k. Mais ceci n'est possible que si $k = 1$ (pour des raisons de degré), et donc que $n = 0$. Donc u est diagonalisable.

Remarque : On peut en fait aller plus loin et calculer la décomposition de Dunford de e^u : $e^u = e^d + e^d(e^n - id)$. Le fait que les deux termes commutent et que e^d soit diagonalisable est trivial. On a aussi bel et bien l'égalité, puisque d et n commutent. Enfin, pour démontrer la nilpotence du deuxième terme, puisque e^d et $e^n - id$ commutent, il suffit de montrer que ce dernier terme est nilpotent, et nous l'avons démontré précédemment.