Série de Fourier des applications continues

Leçons concernées

* **205 :** Espaces complets. Exemples et applications.
* **208 :** Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
* **228 :** Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
* **246 :** Séries de Fourier. Exemples et applications.

Réference

* *Bernis - Analyse pour l'agrégation de mathématiques*

Rappels : On appelle $\mathcal{G}_\delta$ toute intersection dénombrable d'ouverts. On notera par la suite $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques, qui, munit de la norme $||.||_\infty$, est un espace de Banach.

Théorème. *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense D de $(C_{2\pi}, ||.||_\infty)$ tel que :*

$$\forall f \in D, sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f)(x_0)| = +\infty$$

De plus, il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense Δ de $(C_{2\pi}, ||.||_\infty)$ tel que pour tout $f \in \Delta$, l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty\}$$

soit un $\mathcal{G}_\delta$ dense de $\mathbb{R}$.

Preuve : Montrons le premier point. Nous allons tout d'abord exprimer $S_n(f)$ comme un produit de convolution, $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt e^{ikx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt$$

où $D_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ est le *noyau de Dirichlet.* Par la suite, nous aurons besoin d'une expression de D_n qui découle d'un calcul élémentaire (qu'on pourra par exemple inclure dans le plan) :

$$\forall x \neq 0[\pi], D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

En réalisant le changement de variable $u = x - t$, on trouve $S_n(f)(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x-u) du = S_n(f(x-.))(0)$.

Or, l'application de $C_{2\pi}$ dans lui-même qui à f associe $f(x-.)$ est un homéomorphisme, donc transforme un $\mathcal{G}_\delta$ en un autre $\mathcal{G}_\delta$. On peut donc se contenter de démontrer le théorème pour $x_0 = 0$.

Le principe de la démonstration est d'appliquer le théorème de Banach-Steinhaus à une famille de formes linéaires sur $C_{2\pi}$ bien choisie. Définissons pour cela :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in C_{2\pi}, l_n(f) = S_n(f)(0)$$

Par ce qui précède, on a alors, puisque D_n est pair, $l_n(f) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t) dt$ donc $|l_n(f)| \leq ||D_n||_{L^1} ||f||_\infty$. On en déduit que pour tout n entier, l_n est continue et $||l_n|| \leq ||D_n||_{L^1}$. Nous allons en fait montrer qu'il y a égalité.

Soit, pour $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon = \dfrac{D_n}{|D_n| + \varepsilon}$. C'est un élément de $C_{2\pi}$ de norme inférieur à 1. De plus :

$$l_n(f_\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)| + \varepsilon} dt \geq \int_0^{2\pi} \frac{D_n(t)^2 - \varepsilon^2}{|D_n(t)| + \varepsilon} dt = \int_0^{2\pi} (|D_n(t)| - \varepsilon) dt$$

On a donc trouvé que $l_n(f_\epsilon) \geq ||D_n||_{L^1} - 2\pi\varepsilon$. ε étant quelconque, on a $||l_n|| \geq ||D_n||_{L^1}$ et donc l'égalité.

D'après le théorème de Banach-Steinhaus appliqué à la famille (l_n) de formes linéaires continues de $(C_{2\pi}, ||.||_\infty)$, ou bien la famille est bornée, ou bien le $\mathcal{G}_\delta$ dense D de $(C_{2\pi}, ||.||_\infty)$ que nous recherchons existe. Il suffit alors de montrer que la famille (l_n) n'est pas bornée. C'est ici que l'expression de D_n va intervenir.

$$||D_n||_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)|}{|sin\left(\frac{t}{2}\right)|} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)|}{|sin\left(\frac{t}{2}\right)|} dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)|}{\frac{t}{2}} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{|sin(u)|}{u} du$$

et il est connu que cette suite d'intégrable n'est pas convergente, le sinus cardinal n'étant pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Le premier point est alors démontré.

Démontrons le deuxième. Soit (x_k) une suite dense de $[-\pi; \pi[$. D'après le premier point, $\forall k \in \mathbb{N}$, il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense $\mathcal{D}_k$ de $C_{2\pi}$ tel que $\forall f \in \mathcal{D}_k, sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x_k)| = +\infty$.
Soit alors $\Delta = \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_k$. C'est un $\mathcal{G}_\delta$ dense d'après le théorème de Baire.

Soit maintenant $f \in \Delta$. Examinons :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty\} = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \mid sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)| > p\} = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \mid |S_n(f)(x)| > p\} \right)$$

Puisque $S_n(f)$ est continue (c'est un polynôme trigonométrique), on a alors écrit notre ensemble comme intersection dénombrable d'ouverts, qui sont denses puisqu'ils contiennent tous la suite dense (x_k), et que

$S_n(f)$ est 2π-périodique. Cet ensemble est donc bien un $\mathcal{G}_\delta$ dense.

Le théorème est donc démontré.

Remarque : Attention ! Ne réduisez pas ce théorème à cette version suivante : "L'ensemble des séries de Fourier qui ne converge pas uniformément est dense dans $C_{2\pi}$". C'est effectivement un corollaire de ce théorème, mais le théorème précise en plus la forme de l'ensemble dense, qui est un $\mathcal{G}_\delta$!
Pire encore, on peut démontrer ce dernier énoncé très facilement, sans histoire de Baire ou de Banach-Steinhaus, si on sait qu'il existe une fonction $f_0 \in C_{2\pi}$ telle que sa série de Fourier ne converge pas uniformément (il existe de nombreux contre-exemples, mais tous assez difficiles à exprimer, il y en dans le livre de Combes et dans le Queffélec-Zuily ...).

Soient en effet $f \in C_{2\pi}$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, on sait qu'il existe un polynôme trigonométrique P tel que $||f - P||_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors $||f - (P + \frac{\varepsilon f_0}{2||f_0||_\infty})||_\infty < \varepsilon$ et $P + \frac{\varepsilon f_0}{2||f_0||_\infty}$ a une série de Fourier qui ne converge pas uniformément, puisque celle de P converge (et coïncide même avec P au bout d'un certain rang, P étant un polynôme trigonométrique), mais celle de f_0 ne converge pas uniformément.