Prolongement de la fonction Gamma d'Euler

Leçons concernées

* **207 :** Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
* **235 :** Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
* **236 :** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
* **239 :** Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
* **241 :** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
* **245 :** Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.
* **265 :** Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Réference

* *Queffélec-Zuily - Analyse pour l'agrégation*

Théorème. *Soit $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) > 0\}$. On définit la fonction Gamma d'Euler par : $\forall z \in \Omega_0, \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$. Alors Γ est une fonction holomorphe sur Ω_0 qui se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. De plus, Γ vérifie la formule de Weierstrass :*

$$\forall z \in \Omega_0, \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{k}) e^{-\frac{z}{k}}$$

où γ est la constante d'Euler.

Démonstration. Nous allons montrer d'une pierre deux coups que la fonction Γ est bien définie, et même holomorphe, sur Ω_0. On vise pour cela un théorème d'holomorphie sous l'intégrale. Posons alors $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall z \in \Omega_0, f(t,z) = t^{z-1}e^{-t}$.
Alors $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t,.)$ est bien holomorphe, et on peut même calculer sa dérivée si on le souhaite. Dominons maintenant $f(t,z)$. Pour ce faire, nous aurons besoin de prendre K un compact de Ω_0. Donc, on peut coincer toutes les parties réelles de Ω_0 entre deux réels a et b avec $0 < a \leq b$ car K compact. Soit alors $z \in \Omega_0$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, |f(t,z)| \leq \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$$

Et la fonction de droite est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'une part en 0, car $a > 0$, et que exp est continue en 0, et d'autre part en $+\infty$ puisque cette fonction est dominée par $\frac{1}{x^2}$ par les croissances comparées.

Cette domination nous montre en particulier que l'intégrande est intégrable sur tout compact de Ω_0. En particulier, Γ est bien définie sur Ω_0, et d'après le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, cette fonction est holomorphe (et on pourrait aussi calculer sa dérivée).

Nous allons maintenant chercher à étendre Γ de façon méromorphe sur $\mathbb{C}$. Pour ce faire, nous allons prouver la formule de Weierstrass. Posons alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, I_N(x) = \int_0^N t^{x-1}(1-\frac{t}{N})^N dt$$

Sachant que $(1-\frac{t}{N}) \leq e^{-t/N}$, le théorème de convergence dominée nous montre que $\lim_{N\to+\infty} I_N(x) = \Gamma(x)$ (penser à faire rentrer le N de la borne comme une indicatrice dans l'intégrande si on vous demande de le faire proprement).

Cherchons maintenant une autre façon de calculer cette intégrable. Nous allons faire une intégration par partie en dérivant la partie de droit, de sorte que si on intègre par parties N fois, ce terme va disparaître et nous aurons une intégrale simple à calculer. Faisons une première IPP :

$$I_N(x) = \left[\frac{1}{x}t^x(1-\frac{t}{N})^N\right]_0^N + \frac{1}{x}\frac{N}{N}\int_0^N t^x(1-\frac{t}{N})^{N-1}dt$$

$$I_N(x) = \frac{1}{x}\frac{N}{N}\int_0^N t^x(1-\frac{t}{N})^{N-1}dt$$

On constate alors que, dans l'intégrale, le membre de droite a perdu 1 en puissance, et le membre de gauche a gagné 1. Nous allons itérer cette IPP N fois, ce qui va donc faire disparaître le membre de droite. Le membre de gauche va devenir t^{x-1+N} soit t^{x+N-1}. Quant aux termes devant l'intégrale, nous allons à chaque IPP avoir un $\frac{1}{N}$ dû à la dérivation du membre de droite, et donc, au stade suivant, un $N-1$, puis $N-2$, ... De même, nous allons voir apparaître $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{x+2}$, ... puis enfin $\frac{1}{x^{N-1}}$. On a donc au final :

$$I_N(x) = \frac{1}{x}\frac{N!}{N^N}\prod_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1}{x+k}\right)\int_0^N t^{x+N-1}dt$$

Et donc au final :

$$I_N(x) = \frac{1}{x}N^x\prod_{k=1}^{N}\frac{k}{x+k}$$

en faisant rentrer le $N!$ dans le produit.

Regarde maintenant l'inverse de $\Gamma(x)$. Cela a un sens puisque $\Gamma(x)$ est l'intégrale d'une fonction positive continue et non identiquement nulle. Donc $\Gamma(x) \neq 0$. Alors nous avons démontré que :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{N\to+\infty} xN^{-x}\prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

Simplifions un peu cette limite. Soit H_N la N-ème somme partielle de la série harmonique. Alors : $N^{-x} = e^{-xln(N)} = e^{x(H_N-ln(N))}e^{-xH_N}$ et $\lim_N e^{x(H_N-ln(N))} = e^{\gamma x}$ avec γ la constante d'Euler. Ainsi, en rentrant l'exponentielle dans le produit, on obtient :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}$$

Afin d'achever ce développement, il nous reste à voir que la fonction de droite s'étend en une fonction holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. Le terme $xe^{\gamma x}$ s'étends trivialement en une fonction entière. Le problème, c'est le produit. Nous allons alors poser $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{C}, f_k(z) = \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$ qui est bien sûr une fonction entière. Cherchons une fonction intégrable, au sens de la somme, qui domine les $f_k - 1$. Pour cela, nous n'aurons d'autres choix que de nous placer sur un compact de $\mathbb{C}$. Soit $R > 0$ et soit $z \in D(0, R)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|1 - \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}\right| &= \left|1 - \left(1 + \frac{z}{k}\right)\left(1 - \frac{z}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right| \\
&= \left|1 - \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right| \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

le $\mathcal{O}$ provenant du fait que nous avons borné $|z|$ par R. Ainsi, le critère d'holomorphie pour les produits infinis de fonctions holomorphes nous montre que le produit est bien définie et est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

De plus, $\frac{1}{\Gamma}$ et le terme de droite coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est un ouvert admettant un point d'accumulation. Par unicité du prolongement analytique, ces fonctions coïncident donc sur Ω_0. On a donc bien étendu $\frac{1}{\Gamma}$ sur tous les complexes en une fonction holomorphe. En prenant l'inverse, on a étendu alors Γ en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, ce qui achève ce développement.

$\square$

Remarques : Ce développement repose sur certaines connaissances sur les produits infinies de fonctions holomorphes. Il est possible de ne pas les admettre et de directement démontrer le caractère holomorphe du produit, ce qui est cependant plus long (c'est fait ainsi dans le Queffélec-Zuily). Pour gagner du temps, j'ai préféré admettre ce critère, que je vous énonce ici :

Théorème. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une suite $(c_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \Omega, |f_n(z) - 1| \leq c_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n < +\infty$. Alors :*

- *Le produit infini de fonctions holomorphes $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers une fonction f holomorphe sur Ω.*
- *De plus, f s'annule en $\omega \in \Omega$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f_n(\omega) = 0$.*

On peut aussi, bien sûr, avoir une version similaire si la domination est locale.

Démonstration. Nous allons pour cela utiliser la détermination principale du logarithme, log. Alors, dès que $|z| \leq \frac{1}{2}$, on dispose d'une expression en série de $log(1+z)$ et on trouve $|log(1+z)| \leq 2|z|$. Comme (c_n) tends vers 0, il existe un entier M tel que pour $n \geq M+1$, $c_n \leq \frac{1}{2}$. Donc pour $n \geq M+1$, et pour tout $z \in \Omega$, $|f_n(z) - 1| \leq \frac{1}{2}$. Donc, nous pouvons appliquer le logarithme en ces f_n, puisque nous somme assez proche de 1.

Ainsi, $\forall n \geq M+1, \forall z \in \Omega, |log(f_n(z))| \leq 2c_n$. On en déduit que $\left(\sum_{n=M+1}^{+\infty} log(f_n(z))\right)$ converge uniformément vers une fonction holomorphe. En prenant l'exponentielle, on trouve alors que $\prod_{n=M+1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformément vers une fonction holomorphe qui, en plus, ne s'annule jamais, puisqu'on a prit l'exponentielle. En ajoutant les premiers termes, on a donc bien le résultat, et en plus, puisque ce dernier produit ne peut s'annuler, si par hasard f venait à s'annuler en un ω, ω devra annuler un des premiers facteurs (qui sont en nombre fini).

$\square$