Equation de Hill-Mathieu

Leçons concernées

- **220 :** Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'étude de solutions en dimension 1 et 2.
- **221 :** Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Soit $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire, continue et π-périodique. Nous allons nous intéresser à l'équation différentielle linéaire non autonome $y'' + qy = 0$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, les solutions sont globales.
Le but de ce développement est de proposer une étude qualitative de cette équation différentielle, à défaut de savoir la résoudre. Plus particulièrement, le but sera de vérifier le caractère borné, ou non borné, des solutions.

Commençons tout d'abord par quelques notations. Nous allons noter E l'ensemble des solutions de cette équation différentielle, et poser l'application A définie de E dans E par $\forall y \in E, \forall x \in \mathbb{R}, Ay(x) = y(x + \pi)$.
A envoie bien E dans E puisque q est π-périodique, et c'est une application linéaire.

Soit (y_1, y_2) la base de E données par les conditions initiales : $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ et $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$.
Par la suite, nous confondrons A avec sa matrice dans cette base. On écrit alors :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

Commençons alors par un premier lemme :

Lemme. *y_1 et y_2 sont respectivement pair et impair. De plus, $a = d$ et $det(A) = 1$.*

Démonstration. Pour prouver que y_1 est pair, on introduit z l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, z(x) = y_1(-x)$.
Alors, puisque q est paire, z est un élément de E, et $z(0) = 1$ et $z'(0) = 0$. D'après l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, nous avons alors $z = y_1$ et donc y_1 est paire. En considérant $z(x) = -y_2(-x)$, on prouve de même que y_2 est impaire.

On montre maintenant que $det(A) = 1$. Pour cela, nous allons considérer le Wronskien de cette équation différentielle associée à la base que nous avons introduite, w. Alors, en dérivant $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$, on trouve $w' = 0$ (qu'on peut aussi trouver en écrivant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et l'équation différentielle associée. On trouve alors $Y' = B(t)Y$ avec $Tr(B(t)) = 0$ et on utilise $w' = Tr(B(t))w(t)$).
w est donc constant. Or, $w(0) = det(I_2) = 1$ et $w(\pi) = det(A)$ d'où $det(A) = 1$.

Montrons enfin que $a = d$. Pour cela, on calcule l'inverse de A de deux façons différentes. La première façon, c'est d'utiliser la formule d'inversion de matrice pour une matrice de taille 2, en sachant que le déterminant vaut 1 : $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
La deuxième façon, c'est tout simplement d'utiliser son expression explicite ; il s'agit de l'application définie

par : $\forall y \in E, \forall x \in \mathbb{R}, A^{-1}y(x) = y(x-\pi)$ soit :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

en utilisant les résultats de parité ou imparité. Au final, on trouve effectivement $a = d$.

□

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients pour notre théorème. Soit $T = Tr(A)$. On considère le polynôme caractéristique : $\chi_A(X) = X^2 - TX + 1$, de discriminant $\Delta = T^2 - 4$. On distingue alors plusieurs cas :

Cas 1 : $|T| < 2$

Alors $\Delta < 0$. Il existe alors deux racines complexes conjuguées ρ et $\overline{\rho}$ vérifiant, d'après l'expression du polynôme caractéristique, $\rho\overline{\rho} = 1$ soit $|\rho| = 1$.
En particulier, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Soit u_1 et u_2 les deux vecteurs propres associés. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|u_1(x+\pi)| = |\rho u_1(x)| = |u_1(x)|$$
$$|u_2(x+\pi)| = |\overline{\rho} u_2(x)| = |u_2(x)|$$

En particulier, les fonctions $|u_1|$ et $|u_2|$ sont continus et π-périodiques, donc bornées sur $\mathbb{R}$. Puisque toute solution de E s'écrit comme combinaison linéaire de ces deux fonctions, toutes les fonctions de E sont bornées.

Cas 2 : $|T| = 2$

On peut caractériser aisément ce cas ; $T = a + d = 2a$ donc $|T| = 2$ si et seulement si $T^2 = 4$ si et seulement si $a^2 = 1$. Or, $det(A) = a^2 - bc = 1$. Donc $|T| = 2$ si et seulement si $bc = 0$.

Maintenant, voyons ce que nous pouvons en dire. On a alors $\Delta = 0$ donc nous avons une racine réelle double α, qui vérifie en particulier $\alpha^2 = 1$. Donc, il existe une solution non nulle qui est bornée ; il s'agit d'un vecteur propre de A associé à α, en faisant exactement comme précédemment.

Cas 3 : $|T| > 2$

Dans ce cas, $\Delta > 0$. Nous avons alors deux racines réelles distinctes, inverses l'un de l'autre. Notons les ρ et ρ^{-1} avec $|\rho| > 1$. C'est possible, sinon on aurait $|T| \leq 2$ ce qui est exclu ici.

Nous allons alors montrer qu'il n'existe aucune solution non nulle bornée. Prenons alors une base de vecteurs propres u_1 et u_2 associés respectivement à ρ et ρ^{-1}, et prenons $y = \alpha u_1 + \beta u_2 \in E$ avec $(\alpha; \beta) \neq (0; 0)$.
Si $\alpha \neq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, y(x + n\pi) = \alpha\rho^n u_1(x) + \beta\rho^{-n}u_2(x)$. Donc, si on prends x tel que $u_1(x) \neq 0$ (ce qui est possible puisque u_1 est un vecteur propre), alors quand n tends vers $+\infty$, on a que $y(x + n\pi)$ est équivalent à $\alpha\rho^n u_1(x)$ qui tends veers $+\infty$ en module. y n'est donc pas bornée.
Si $\alpha = 0$, on fait le même procédé, mais dans l'autre sens : $y(x - n\pi) = \beta\rho^{-n}u_2(x)$ pour x tel que $u_2(x) \neq 0$, et cette dernière expression divergevers $+\infty$ en module.

On a donc prouvé que toute les solutions étaient non bornées.