161 Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Cadre : Soient G un groupe et X un ensemble.

I] Opérations de groupe sur un ensemble

A] Définitions et premières propriétés

[1]

Def 1 : Une action (à gauche) sur X est la donnée de
$$G\times X \longrightarrow X,\quad (g,x)\longmapsto g.x$$
telle que $\forall g,g'\in G, \forall x\in X$, $g.(g'.x)=gg'.x$ et $1.x=x$.

Rem 2 : Ceci équivaut à se donner un morphisme de groupes de G dans $Bij(X)$: $g\mapsto (x\mapsto g.x)$

Ex 3 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, S_n agit sur $[\![1;n]\!]$ via : $\forall \sigma\in S_n$, $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $\sigma.k=\sigma(k)$.

Def 4 : L'action est transitive si $\forall x,y\in X, \exists g\in G /$ $g.x=y$. Si $k\in\mathbb{N}^*$, elle est k-fois transitive si pour toute liste $(x_i)_{1\le i\le k}$ et $(y_i)_{1\le i\le k}$ de X, il existe $g\in G$ tel que $\forall i\in[\![1;k]\!]$, $g.x_i=y_i$.

Ex 5 : L'action de S_n sur $[\![1;n]\!]$ est k-fois transitive pour tout $k\in[\![1;n]\!]$.

Def 6 : L'action est fidèle si $G\to Bij(X)$ est injectif.

Rem 7 : Ceci équivaut à dire que le seul élément fixant tout X est le neutre.

Ex 8 : L'action de S_n sur $[\![1;n]\!]$ est fidèle.

Rem 9 : Si $\varphi : G\to Bij(X)$ est une action, $G/\ker\varphi$ opère fidèlement sur X.

B] Orbites et stabilisateurs

[1]

Prop-def 10 : La relation binaire sur X : $x\mathcal{R}y \iff \exists g\in G$, $y=g.x$ est une relation d'équivalence. Ses classes sont les orbites de l'action, notées $G.x$, $x\in X$.

[1]

Rem 11 : L'action est alors transitive si et seulement si il n'y a qu'une seule orbite.

App 12 : Soit $\sigma\in S_n$. $\langle\sigma\rangle$ agit sur $[\![1;n]\!]$. σ se comporte comme un cycle sur chacune des orbites. On obtient ainsi la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de σ.

Def 13 : Soit $x\in X$. On définit le stabilisateur de x sous G par $Stab_G(x)=\{g\in G \mid g.x=x\}$.

Prop 14 : Les stabilisateurs sont des sous-groupes de G.

Ex 15 : Le stabilisateur de n sous S_n est isomorphe à S_{n-1}.

Rem 16 : En général, les stabilisateurs ne sont pas distingués. Par la suite, $G/Stab_G(x)$ désignera les classes à gauche.

Thm 17 : Soit $x\in X$. Alors $G/Stab_G(x)$ et $G.x$ sont en bijection.

Cor 18 : Si $|G|<+\infty$, $\forall x\in X$, $\operatorname{Card} G.x = \dfrac{|G|}{|Stab_G(x)|}$

Cor 19 : (Formule des classes) Soit R un système de représentants des orbites. Si G et X sont finis, alors
$$|X| = \sum_{x\in R}\frac{|G|}{|Stab_G(x)|}$$

Def 20 : On définit $X^G=\{x\in X \mid \forall g\in G, g.x=x\}$

Cor 21 : Si G est un p-groupe, $|X^G|\equiv|X|\ [p]$ si X fini.

App 22 : Le centre d'un p-groupe est non trivial.

App 23 : Tout p-groupe d'ordre p ou p^2 est abélien.

II] Actions d'un groupe sur un autre groupe

A] Action par translation

[1]

Prop-def 24 : G opère par translation à gauche sur lui-même : $g.g' = gg'$ $\forall g,g'\in G$.

[1]

Prop 25: Cette action est fidèle et transitive.

App 26: (Théorème de Lagrange) Si $|G| < \infty$ et $H < G$, alors $|H| \mid |G|$.

App 27: (Théorème de Cayley) Si G est d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, alors $G \hookrightarrow S_n$.

Prop-def 28: Si $H < G$, G opère sur G/H via : $\forall g, a \in G$, $g \cdot (aH) = gaH$.

Prop 29: Cette action est transitive et $\forall a \in G$, $\mathrm{Stab}(aH) = aHa^{-1}$.

App 30: Si G est infini et possède un sous-groupe H d'indice fini alors G n'est pas simple.

B] Action par automorphisme intérieur

[1]

Prop-def 31: G agit sur lui-même via $\forall g, g' \in G$, $g \cdot g' = gg'g^{-1}$. Les orbites sont les classes de conjugaison et les stabilisateurs sont les centralisateurs.

Thm 32: Les p-cycles sont conjugués dans S_n. Si $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans A_n.

App 33: $\sigma, \sigma' \in S_n$ sont conjugués si et seulement si ils ont même nombre de p-cycles dans leur décomposition.

App 34: $\forall n \geq 5$, A_n est simple.

Prop-def 35: Si X est l'ensemble des sous-groupes de G, G agit sur X via : $\forall g \in G$, $\forall H \in X$, $g \cdot H = gHg^{-1}$.

Thm 36: (DEV1) Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors $SO_3(\mathbb{R}) \simeq G/\{\pm 1\}$.

C] Application aux théorèmes de Sylow

On suppose ici que $|G| = p^\alpha m$ avec p premier, $\alpha \geq 1$, $m \wedge p = 1$.

[1]

Def 37: Un p-Sylow de G est un sous-groupe H d'ordre p^α.

Lem 38: Soit $H < G$. Si G admet un p-Sylow, alors il existe un $a \in G$ tel que aHa^{-1} soit p-Sylow de H.

[1]

Thm 39: G admet un p-Sylow.

Cor 40: G admet des sous-groupes d'ordre p^i, $i \in [\![1;\alpha]\!]$.

Thm 41: (de Sylow) Les p-Sylow sont conjugués dans G. De plus, leur nombre n_p vérifie $n_p \mid |G|$ et $n_p \equiv 1 [p]$.

Cor 42: G admet un unique p-Sylow S si et seulement si $S \lhd G$.

App 43: Un groupe d'ordre 63 n'est jamais simple.

III) Actions de groupes et algèbre linéaire

A] Action sur des espaces de matrices

[2]

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Prop-def 44: $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ via : $(P,Q) \cdot M = PMQ^{-1}$. Deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes.

Thm 45: (du rang) Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

App 46: Résolution de systèmes linéaires.

Prop-def 47: $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ via : $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \cdot M = PMP^{-1}$. Deux matrices dans la même orbite sont dites semblables.

Prop 48: Deux matrices sont semblables si et seulement si elles définissent la même application linéaire modulo un changement de base.

Prop 49: Deux matrices semblables ont mêmes polynômes minimal et caractéristiques.

Def 40: Pour $\sigma \in S_n$, soit $P_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Prop 41: $\sigma \mapsto P_\sigma$ est une action fidèle de S_n sur $\mathbb{K}^n$.

Thm 42: (DEV2) (de Brauer) Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$. Si

Cor $K=0$, ρ et ρ' sont conjugués si et seulement si P_ρ et $P_{\rho'}$ sont semblables.

B] Actions sur un espace vectoriel

On suppose G fini.

Def 43 : Une représentation de G est un couple $(\rho : V)$ où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et ρ une action de G sur V. $\dim V$ est le degré de $(\rho : V)$.

Ex 44 : $G \hookrightarrow S_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{K})$ où $n = |G|$ induit une représentation de G, dite régulière, qui est fidèle.

Def 45 : Le caractère de $(\rho : V)$ est $\chi_\rho : \begin{array}{l} G \to \mathbb{C} \\ g \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{array}$

[3] Def 46 : Un sous-espace F de V est dit G-invariant si il est stable sous l'action de G. Ceci induit une sous-représentation $(\rho : F)$. $(\rho : V)$ (ou χ_ρ) est dit irréductible si il n'admet pas de sous-représentation non triviales.

Thm 47 : Les caractères irréductibles de G forment une base de l'espace des fonctions centrales de G, qui est de dimension le nombre de classes de conjugaison de G.

Cor 48 : Si $\chi_1, \dots, \chi_r$ sont les caractères irréductibles de G, ses sous-groupes distingués sont ceux de la forme $\bigcap_{i \in I} K_i$ où $I \subset [\![1, r]\!]$ et $K_i = \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(1)\}$.
Ceci permet de lire les sous-groupes distingués de G sur sa table de caractères.

IV] Géométrie affine et groupes d'isométries

[4] Def 49 : L'action de G sur X est simple si $\forall x, y \in X$, il existe au plus un $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$

Def 50 : Soient E un ensemble et $\vec{E}$ un espace vectoriel. E est un espace affine de direction $\vec{E}$ si $(\vec{E}, +)$ agit simplement et transitivement sur E.

Rem 51 : Donc $\forall M, N \in E, \exists! \vec{u} \in \vec{E} \,/\, M + \vec{u} = N$. On note $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.

Def 52 : Soit $f : E \to E$. f est dite affine de partie linéaire $\vec{f} \in \mathcal{L}(\vec{E})$ si $\forall M \in E, \forall \vec{u} \in \vec{E}, f(M+\vec{u}) = f(M) + \vec{f}(\vec{u})$.
f est une isométrie si $\vec{f} \in O(\vec{E})$. On note $Is(E)$ le groupe des isométries de E.

Prop-def 53 : $Is(E)$ agit sur E par translation. Le stabilisateur $Is_O(E)$ de $O \in E$ est le sous-groupe d'isotropie de E.

Rem 54 : $\forall O \in E$, $Is_O(E) \simeq O(\vec{E})$. Ceci permet de ramener l'étude de $Is(E)$ à $O(\vec{E})$ couplet au théorème :

Thm 55 : Si $f \in Is(E)$, il existe un unique couple $(\vec{u} \in \vec{E}$ et $g \in Is(E))$ tel que $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$, $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$ et g possède un point fixe, où $t_{\vec{u}} : M \mapsto M + \vec{u}$.

App 56 : On peut ainsi classifier les isométries en dimension 2 et 3.

Références :

- Cours d'algèbre, Perrin [1]
- H2G2, Caldero [2]
- Algèbre et géométrie, Rombaldi [3]
- Cours de géométrie, Mercier [4]