106

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Cadre: Soit E un k-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, k corps commutatif.

I) Groupe linéaire

A] Définitions

[1]

Prop-def 1: On définie $GL(E)$ comme étant l'ensemble des automorphismes de k-espace vectoriel sur E. C'est un groupe, muni de la composition, appelé groupe linéaire.

Rem 2: Si $GL_n(k)$ est l'ensemble des matrices inversibles de taille n sur k, alors $GL(E) \simeq GL_n(k)$.

Ex 3: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$

Thm 4: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors:

$u \in GL(E) \Leftrightarrow \ker u = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{im} u = E \Leftrightarrow \det u \neq 0$

Prop-def 5: $\det : GL(E) \to k^*$ est un morphisme de groupes. On note $SL(E)$ son noyau appelé groupe spécial linéaire.

Thm 6: $SL(E) \triangleleft GL(E)$ et $GL(E) \simeq SL(E) \rtimes k^*$

B] Générateurs de $GL(E)$

Soit $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(k)$.

[3]

Def 7: On appelle matrice de:

* transvection: $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ avec $i \neq j$, $\lambda \in k^*$
* dilatation: $D(\alpha) = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, \alpha)$, $\alpha \in k^*$.

Ce sont des éléments de $GL_n(k)$.

Rem 8: Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$ de lignes $L_1 \dots L_n$ et de colonnes $C_1, \dots, C_n$.

$T_{ij}(\lambda)A$ revient à faire $L_i \to L_i + \lambda L_j$

$A\,T_{ij}(\lambda)$ revient à faire $C_j \to C_j + \lambda C_i$

[3]

Meth 9: (de Gauss) La méthode de Gauss revient à multiplier par de bonnes matrices $T_{ij}(\lambda)$ à gauche de sorte à transformer une colonne en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui est toujours possible si $A \in GL_n(k)$. On peut faire de même sur les lignes en opérant à droite. On a alors:

Thm 10: Les transvections engendrent $SL_n(k) = \{A \in GL_n(k) \mid \det A = 1\}$.

[1]

Cor 11: Les transvections et les dilatations engendrent $GL_n(k)$.

Def 12: $u \in GL(E)$ est une transvection (resp. dilatation) si sa matrice dans une certaine base est une matrice de transvection (resp. dilatation).

Rem 13: On a alors des générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$.

Cor 14: On a $Z(GL(E)) \simeq k^*$ et $Z(SL(E)) \simeq \{\lambda \in k^* \mid \lambda^n = 1\}$.

Prop 15: Les transvections sont conjuguées dans $GL(E)$. Si $n \geq 3$, elles le sont aussi dans $SL(E)$.

App 16: Si $n \neq 2$ ou $k \neq \mathbb{F}_2$, $D(GL_n(k)) = SL_n(k)$.

II) Quelques sous-groupes de $GL(E)$

A] Groupe orthogonal

On suppose ici que $k = \mathbb{R}$ et que E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

[1]

Prop-def 17: $u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si $\forall x, y \in E$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$. On note $O(E)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ orthogonaux. C'est un sous-groupe de $GL(E)$.

Thm 18: Soit $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$. Alors $O(E) \simeq O_n(\mathbb{R})$.

[2]

Prop 19: $\forall u \in O(E)$, $\det u = \pm 1$ et $Sp_{\mathbb{C}}(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$

Thm 20: Soit $u \in O(E)$. Alors sa matrice dans une certaine base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} I_p & & & 0 \\ & -I_q & & \\ & & R_{\theta_1} & \\ 0 & & & \ddots R_{\theta_r} \end{pmatrix}$ où $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$, $\theta_i \neq \pi \, [2\pi]$.

Def 21: On définit le groupe spécial orthogonal par $SO(E) = O(E) \cap \det^{-1}(1)$. Alors $SO(E) \simeq SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

[1] **Lem 22**: Soit $u \in GL(E)$ tel que $u^2 = id$. Alors $E = \ker(u - id) \oplus \ker(u + id)$

Def 23: Dans ce cas, si $\dim \ker(u+id) = 1$, on parle de réflexion. Si $\dim \ker(u+id)$, on parle de renversement

Prop 24: Soit $u \in GL(E)$ tel que $u^2 = id$. $u \in O(E) \Leftrightarrow \ker(u+id) \perp \ker(u-id)$

Thm 25: $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales.

Cor 26: Si $n \geq 3$, $SO(E)$ est engendré par les renversements orthogonaux.

App 27: (DEV 1) Soit G le groupe des quaternions de module 1. Alors $SO_3(\mathbb{R}) \simeq G/\{\pm 1\}$.

Thm 28: $Z(O(E)) = \{\pm id\}$ et si $n \geq 3$, $Z(SO(E)) = Z(O(E)) \cap SO(E)$

Rem 29: Si $n = 2$, $SO(E)$ est abélien.

B] Quelques sous-groupes finis de GL(E)

[5] **Def 30**: Soit $\sigma \in S_n$. On définit sa matrice de permutation par : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $P_\sigma(e_i) = e_{\sigma^{-1}(i)}$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de k^n.

Prop 31: $\forall \sigma \in S_n$, $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$

Prop 32: $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes qui est injectif. En particulier, $\{P_\sigma \mid \sigma \in S_n\}$ est un sous-groupe de $GL_n(k)$ d'ordre $n!$.

Thm 33: (de Brauer) Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$. Si $car(k) = 0$, σ et σ' sont conjuguées si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables. [5]

Supposons que $k = \mathbb{F}_q$, $q = p^\alpha$ soit un corps fini.

Thm 34: On a les égalités : $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$; $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = \left(\prod_{i=0}^{n-2} (q^n - q^i)\right) q^{n-1}$ [1]

Cor 35: $GL_n(\mathbb{F}_q)$ admet un p-Sylow.

App 36: (Théorème de Sylow) Tout groupe fini G tel que $p \mid |G|$ admet un p-Sylow.

III) Actions sur des espaces de matrices

A] Par translation à gauche

Prop-def 37: $GL_n(k)$ agit sur $\mathcal{M}_{n,m}(k)$ via : $\forall P \in GL_n(k)$, $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(k)$, $P.A = PA$. [4]

Thm 38: Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(k)$ est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée en lignes.

App 39: Résolution de systèmes linéaires

App 40: Calcul de rang

B] Par équivalence

Prop-def 41: $GL_n(k) \times GL_m(k)$ agit sur $\mathcal{M}_{n,m}(k)$ via : $(P,Q).A = PAQ^{-1}$. Deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes. [4]

Rem 42: Cette action correspond à un changement de bases au départ et à l'arrivée.

Thm 43: Deux matrices sont équivalentes si et

[4] seulement si elles ont même rang.

App 44 : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(k)$, $rg({}^tA) = rg(A)$

C] Par conjugaison

Prop-def 45 : $GL_n(k)$ agit sur $\mathcal{M}_n(k)$ via : $\forall P \in GL_n(k)$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(k)$, $P.A = PAP^{-1}$. Deux matrices dans la même orbite sont dites semblables.

[2] Rem 46 : Ceci correspond à un changement dans une même base au départ et à l'arrivée.

Def 47 : $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Thm 48 : $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme annulateur π_A est scindé à racines simples.

D] Par congruence ($car(k) \neq 2$)

[4] Prop-def 49 : $GL_n(k)$ agit sur $\mathcal{S}_n(k)$ via : $\forall P \in GL_n(k)$, $\forall A \in \mathcal{S}_n(k)$, $P.A = PA{}^tP$.

[1] Rem 50 : Ceci peut se voir comme une action de $GL(E)$ sur les formes quadratiques de E $Q(E)$: $\forall q \in Q(E)$, $\forall u \in GL(E)$, $u.q = q \circ u$.

Thm 51 : Si k est algébriquement clos, $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont congruentes si et seulement si $rg\, A = rg\, A'$.

[4] Thm 52 : Si $k = \mathbb{R}$, toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ congruente à une unique matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, (p,q) est la signature de A.

Thm 53 : Si k est fini, deux matrices de $\mathcal{S}_n(k) \cap GL_n(k)$ sont congruentes si et seulement si elles ont même déterminant modulo un carré.

App 54 : Loi de réciprocité quadratique.

IV) Éléments de topologie

A] Connexité

Thm 55 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. [2]

Rem 56 : $\mathbb{R}^*$ n'étant pas connexe, on ne peut espérer un tel résultat pour $GL_n(\mathbb{R})$. Cependant :

Thm 57 : Les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$ sont $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A < 0\}$

App 58 : Les composantes connexes des formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbb{R}$ sont les formes quadratiques de même signature.

B] Compacité

Def 59 : Soit le groupe unitaire : $U_n(\mathbb{C}) = \{U \in GL_n(\mathbb{C}) \mid U^*U = I\}$

Prop 60 : $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$ sont compacts.

App 61 : (DEV 2) (Décomposition polaire) Soit $H_n^{++}(\mathbb{C})$ les matrices hermitiennes définies positives. Alors
$$\begin{aligned} H_n^{++}(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C}) &\to GL_n(\mathbb{C}) \\ (H, U) &\mapsto HU \end{aligned}$$
est un homéomorphisme.

C] Densité

Thm 62 : $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$) est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) [5]

App 63 : $\det$ est différentiable et $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d\det_X(H) = Tr({}^t com(X) H)$.

Rem 64 : $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont fermés.

Références :

- Cours d'algèbre, Perrin [1]
- Algèbre et géométrie, Rombaldi [2]
- Algèbre, Gourdon [3]
- Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, Caldero [4]
- Objectif agrégation [5]