107

Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples.

Cadre : Soit G un groupe fini d'ordre $|G| \geq 2$.

I) Représentation linéaire d'un groupe

A] Définitions et propriétés

Def 1 : On appelle représentation de G tout couple (ρ, V) où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\rho : G \to GL(V)$ un morphisme de groupe. Elle est dite finie si $\dim V < \infty$ et on note $\deg(\rho, V) = \dim V$ le degré de la représentation.

Rem 2 : ρ est ainsi une action de G sur V [1]

Ex 3 : $\rho \equiv id$ est une représentation dite triviale

Prop-def 4 : $\mathbb{C}^G$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $|G|$. Si $(e_g)_{g \in G}$ est une base, $(\rho, \mathbb{C}^G)$ où $\forall g \in G, \forall h \in G, \rho(g)(e_h) = e_{gh}$ est une représentation. C'est la représentation régulière de G.

Ex 5 : Si $G = S_n$, et si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^N$, $\rho(\sigma)(e_k) = e_{\sigma(k)}$ définit une représentation de S_n.

Nous nous intéresserons à la suite uniquement à des représentations finies.

Prop-def 6 : Soient (ρ_E, E) et (ρ_F, F) deux représentations de G. On définit une nouvelle représentation $(\rho_{E\oplus F}, E \oplus F)$ en posant $\forall (x,y) \in E \times F, \forall g \in G, \rho_{E\oplus F}(g)(x \oplus y) = \rho_E(g)(x) + \rho_F(g)(y)$

Prop-def 7 : Avec les mêmes notations, $(\tau, \mathcal{L}(E,F))$ est une autre représentation de G où $\forall g \in G, \forall u \in \mathcal{L}(E,F)$ $\tau(g)(u) = \rho_F(g) \circ u \circ \rho_E(g)^{-1}$ [2]

Def 8 : $\operatorname{Ker} \rho$ est le noyau de la représentation (ρ, V). La représentation est dite fidèle si ρ est injectif.

Prop 9 : La représentation régulière de G est fidèle.

B] Sous-représentations et morphismes de représentations

Def 10 : Un sous-espace W de V est dit G-invariant si $\forall g \in G, \rho(g)(W) \subset W$. Par restriction, cela induit une nouvelle représentation (ρ, W) de G. On dit que c'est une sous-représentation de (ρ, V).

Ex 11 : $\{0\}$ et V sont toujours G-invariants.

Def 12 : On définit $V^G = \{x \in V \mid \forall g \in G, \rho(g)(x) = x\}$ [1]

Rem 13 : V^G est un sous-espace G-invariant.

Def 14 : Soient (ρ, V) et (σ, W) deux représentations de G. On dit que $u \in \mathcal{L}(V,W)$ est un morphisme de représentations si $\forall g \in G, \sigma(g) \circ u = u \circ \rho(g)$. Si u est inversible, c'est un isomorphisme de représentations. On notera $\mathcal{L}_G(V,W)$ l'ensemble des morphismes de représentations de V dans W.

Prop 15 : Si $\mathcal{L}(V,W)$ est munie de la représentation définie en 7, $\mathcal{L}(V,W)^G = \mathcal{L}_G(V,W)$.

Prop 16 : Si $u \in \mathcal{L}_G(V,W)$, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont G-invariants dans leur espace respectif.

C] Représentations irréductibles et Théorème de Maschke

Def 17 : (ρ, V) est dite irréductible si il n'admet aucun espace G-invariant autre que $\{0\}$ et V. [1]

Ex 18 : La représentation régulière n'est pas irréductible car $H = \{(x_1, \dots, x_{|G|}) \mid \sum_{i=1}^{|G|} x_i = 0\}$ est G-invariant non trivial. La sous-représentation induite est appelée représentation standard. [2]

Rem 19 : Toute représentation de degré 1 est irréductible

Lem 20 : (de Schur) Soient (ρ, V) et (σ, W) deux représentations irréductibles. Si V et W ne sont pas isomorphes alors $\mathcal{L}_G(V,W) = \{0\}$. Si ils sont isomorphes, $\dim \mathcal{L}_G(V,W) = 1$ et les morphismes de représentations sont des homothéties. [1]

Lem 21 : Tout sous-espace G-invariant de V admet un supplémentaire dans V G-invariant.

[1] **Thm 22 :** (de Maschke) Toute représentation de G est somme directe de sous-représentations irréductibles.

Rem 23 : Cette décomposition n'est pas unique.

II) Caractère d'une représentation

A] Définitions et propriétés

Def 24 : On appelle caractère de G toute application $\chi : G \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe une représentation (ρ, V) telle que $\forall g \in G$, $\chi(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$. χ est dite irréductible si (ρ, V) est irréductible. On note χ_ρ au lieu de χ.

Ex 25 : Si $(\rho, \mathbb{C}^G)$ est la représentation régulière de G,
$$\chi_\rho(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{si } g \neq 1 \end{cases}$$

[1] **Ex 26 :** Si χ est le caractère de la représentation de l'exemple 5, $\chi(\sigma) = \mathrm{Card}\,\mathrm{Fix}(\sigma)$.

Prop 27 : Soient (ρ, V) et (σ, W) deux représentations de G.
- $\chi_\rho(1) = \dim V$
- $\chi_{\rho \oplus \sigma} = \chi_\rho + \chi_\sigma$

Thm 28 : Deux représentations isomorphes ont mêmes caractères.

Rem 29 : Nous verrons que la réciproque est vraie.

B] Fonctions centrales et orthogonalité des caractères

[1] **Def 30 :** Une fonction $\varphi : G \to \mathbb{C}$ est dite centrale si elle est constante sur les classes de conjugaison de G.

Ex 31 : Les caractères sont des fonctions centrales.

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble de telles fonctions.

Prop-def 32 : On définit un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{H}$ en posant $\langle \varphi | \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)} \psi(g)$ [1]

Def 33 : On définit l'opérateur de Reynolds de (ρ, V) par $p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$ [2]

Lem 34 : p est un projecteur d'image V^G.

Thm 35 : $\dim V^G = \langle \chi_\rho, \chi_{triv} \rangle$ où χ_{triv} est le caractère de la représentation triviale.

Lem 36 : Soit $(\tau, \mathcal{L}(V, W))$ la représentation définie en 4. Alors $\chi_\tau = \overline{\chi_\rho} \chi_\sigma$

Thm 37 : $\dim \mathcal{L}_G(V, W) = \langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle \in \mathbb{N}$.

Cor 38 : On suppose que (ρ, V) et (σ, W) sont irréductibles. Alors (ρ, V) est isomorphe à (σ, W) si et seulement si $\chi_\rho = \chi_\sigma$, si et seulement si $\langle \chi_\rho, \chi_\sigma \rangle \geq 1$.

Cor 39 : Si $\chi_1, \dots, \chi_p$ sont des caractères irréductibles 2 à 2 distincts, alors $(\chi_1, \dots, \chi_p)$ est libre. En particulier, G admet un nombre fini de caractères irréductibles. [1]

Thm 40 : Les caractères irréductibles de G forment une base orthonormée de $\mathcal{H}$. En particulier il y en a autant que de classes de conjugaison de G.

Cor 41 : Il y a p représentations irréductibles de G à isomorphisme près où p est le nombre de classes de conjugaison de G.

Thm 42 : Soient (ρ, V) et (σ, W) deux représentations qu'on décompose en somme de représentations irréductibles
$$(\rho, V) = \sum_{i=1}^{n} (\rho_i, V_i), \quad (\sigma, W) = \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i, W_i)$$
On a équivalence entre :
- (ρ, V) et (σ, W) sont isomorphes

[1]

(a) $\chi_\rho = \chi_\sigma$

(b) $n = n'$ et $\exists \sigma \in S_n \,/\, (\rho_i, V_i)$ isomorphe à $(\rho'_{\sigma(i)}, W_{\sigma(i)})$ $\forall i$

<u>Cor 43</u> : Soit χ un caractère. χ est irréductible si et seulement si $\langle \chi | \chi \rangle = 1$.

III) Tables de caractères

A] Constructions et exemples

[2]

<u>Def 44</u> : Soient $(\chi_1, \dots, \chi_p)$ les caractères irréductibles de G et $(g_1 = 1, \dots, g_p)$ des représentants des différentes classes de conjugaison de G. La table de caractère de G est la matrice $(\chi_i(g_j))_{1 \leq i,j \leq p}$

<u>Ex 45</u> : σ_3 possède trois classes de conjugaison, donc trois caractères irréductibles : le trivial, le caractère donné par la signature, et un donné par les isométries du triangle. On en déduit Fig 1 (Voir annexe).

[1]

<u>Thm 46</u> : $\displaystyle\sum_{i=1}^{} \chi_k(g_i) \overline{\chi_k(g_j)} = \begin{cases} \frac{|G|}{\mathrm{Card}(g_i)} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

<u>Rem 47</u> : Ceci donne l'orthogonalité des colonnes

[1]

<u>Cor 48</u> : (Formule de Burnside) Si $V_1, \dots, V_p$ sont des espaces associés à $\chi_1, \dots, \chi_p$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} (\dim V_i)^2 = |G|$

<u>App 49</u> : G est abélien si et seulement si ses caractères irréductibles sont de degré 1.

[2]

<u>App 50</u> : (DEV 1) Table de caractère de S_4 (Fig 2)

B] Utilisation de la table de caractères

La table des caractères peut être utilisée pour avoir des informations sur G.

<u>Prop 51</u> : G est abélien si et seulement si la première colonne de sa table est uniquement constituée de 1.

<u>Ex 52</u> : S_3 n'est pas abélien.

[2]

<u>Lem 53</u> : (DEV 2) $\mathrm{Ker}\, \rho = \{ g \in G \,|\, \chi_\rho(g) = \chi_\rho(1) \}$

<u>Prop 54</u> : Soient $\chi_1, \dots, \chi_p$ les caractères irréductibles de G. Soit H un sous-groupe de G. Alors $H \triangleleft G$ si et seulement si $\exists I \subset [\![1 ; p]\!] \,/\, H = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ où $K_{\chi_i} = \{ g \in G \,|\, \chi_i(g) = \chi_i(1) \}$

<u>Cor 55</u> : G est simple si et seulement si pour tout caractère irréductible non trivial on a $\forall g \in G \setminus \{1\}$, $\chi(g) \neq \chi(1)$.

<u>Ex 56</u> : On observe ainsi que les sous-groupes distingués de S_4 sont $\langle (12)(34) \rangle$, A_4, $\{id\}$ et lui-même.

Références :

⊛ Algèbre et géométrie, Rombaldi [1]

⊛ Algèbre discrète de la transformée de Fourier, Peyré [2]

Fig 1 : Table de caractère de S_3 :

	id	(12)	(123)
χ_{triv}	1	1	1
χ_ε	1	-1	1
χ	2	0	-1

Fig 2 : Table de caractères de S_4 :

	id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_4	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2