Exemples d'actions de groupes sur des espaces de matrices.

150

Soient $n,m \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

I) Action par multiplication à gauche

A] Définitions et méthodes de Gauss

[1]

<u>Prop-def 1</u>: $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.
$(P;A) \longmapsto PA$

<u>Rem 2</u>: L'étude de cette action permet de résoudre des systèmes linéaires $AX=b$: l'idée est de chercher une matrice plus simple dans l'orbite de A.

<u>Def 3</u>: $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est échelonnée en lignes si les lignes $L_1, \dots, L_n$ vérifient:
- $\forall i \in [\![1;n-1]\!]$ $L_i = 0 \Rightarrow L_{i+1} = 0$
- $\forall i \in [\![1;n-1]\!]$, si $L_i \neq 0$ et j le plus petit rang tel que $L_{i,j} \neq 0$ alors $L_{i+1,j} = 0$.

<u>Ex 4</u>: La matrice suivante est échelonnée en lignes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[4]

<u>Def 5</u>: Soit $(E_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle matrice de transvection : $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i \neq j$.

<u>Rem 6</u>: Multiplier A à gauche par $T_{ij}(\lambda)$ revient à remplacer L_j par $L_j + \lambda L_i$

[1]

<u>Thm 7</u>: Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée en lignes sous l'action de $GL_n(\mathbb{K})$.

<u>Rem 8</u>: La méthode de Gauss permet de calculer explicitement cette matrice.

<u>App 9</u>: On peut résoudre un système $AX = b$ en trouvant $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que PA soit échelonnée. On résout ainsi $PAX = Pb$ qui est plus simple.

<u>App 10</u>: Calcul de rangs de matrice.

[1]

<u>Thm 11</u>: $A, A' \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite si et seulement si $\ker A = \ker A'$.

<u>Rem 12</u>: Par transposition, on en déduit des résultats similaires pour l'action à droite de $GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$: $(P;A) \longmapsto AP^{-1}$.

B] Restriction à $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$

Par restriction, $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$ agissent à gauche sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

[4]

<u>Thm 13</u>: (de décomposition polaire) Soient $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $H_n^{++}(\mathbb{C})$) les matrices symétriques (resp. hermitiennes) définies positives. Alors $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ et
$(O;S) \longmapsto OS$
$U_n(\mathbb{C}) \times H_n^{++}(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ sont des homéomorphismes.
$(U;H) \longmapsto UH$

<u>Cor 14</u>: Toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ est dans l'orbite d'une unique matrice symétrique définie positive sous l'action de $O_n(\mathbb{R})$, et similairement sur $\mathbb{C}$.

II) Action de Steinitz

A] Action par équivalence

[1]

<u>Prop-def 15</u>: Soit $G = GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$. Alors $G \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définit une action
$((P;Q);A) \longmapsto PAQ^{-1}$
dite de Steinitz de G sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Deux matrices dans la même orbite sous cette action sont dites équivalentes.

Rem 16 : Cette action correspond à un changement de base au départ et à l'arrivée.

[1] Thm 17 : (du rang) Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est équivalente à une unique matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = rg(A)$.

Cor 18 : Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

App 19 : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}),\ rg\, A = rg\, {}^tA$.

App 20 : Le rang est invariant par extension de corps.

Rem 21 : On peut trouver explicitement la forme du Thm 17 en appliquant l'algorithme de Gauss sur les lignes puis les colonnes.

B] Résultats topologiques

On travaille ici avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n = m$. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est donc muni de sa topologie naturelle d'espace normé.

Prop 22 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang $r \in [\![0;n]\!]$ si et seulement si la plus grande matrice inversible qu'on peut extraire de A est de taille r.

[1] Rem 23 : Soit G_r l'ensemble des matrices de rang r. On a vu que les orbites de l'action de Steinitz sont exactement $G_0, G_1, \dots, G_n$.

Thm 24 : $\forall r \in [\![0;n]\!],\ \overline{G_r} = \bigcup_{k \le r} G_k$

Cor 25 : $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

III) Action par conjugaison

A] Définitions et propriétés

[1] Prop-def 26 : $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une

$(P\ ;\ A) \longmapsto PAP^{-1}$

action dite par conjugaison. Les orbites sont appelées classes de similitude et deux matrices dans la même orbite sont dites semblables. [1]

Rem 27 : Cette action correspond à un même changement de base au départ et à l'arrivée.

Def 28 : Une matrice est dite : [2]

① diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale

② trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Ex 29 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable mais pas diagonalisable

Def 30 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit son polynôme caractéristique par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$. Ses racines sont les valeurs propres de A, qui forment le spectre $Sp(A)$. Si $\lambda \in Sp(A)$, un vecteur propre associé à λ est un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $Ax = \lambda x$ et $x \neq 0$.

Def 31 : Le polynôme minimal π_A est le générateur unitaire des polynômes annulateurs de A.

Thm 32 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes : [2]

① A est diagonalisable

② π_A est scindé à racines simples

③ χ_A est scindé et si λ est racine, alors sa multiplicité est $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$

Ex 33 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Thm 33 : A est trigonalisable si et seulement si χ_A ou π_A sont scindés sur $\mathbb{K}$. [2]

> Thm 34 : (DEV 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $C(A)$ sa classe de similitude. On a alors : [5]
> - A nilpotente $\Leftrightarrow 0 \in \overline{C(A)}$
> - A diagonalisable $\Leftrightarrow C(A)$ fermée

Prop 35 : Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors A^k et B^k de même pour tout $k \geq 0$. [2]

On s'intéresse au cas particulier des matrices de permutation

Thm 36 : (DEV 2) (de Brauer) Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ et P_σ, P_τ leur matrice de permutations. σ et τ sont conjugués si et seulement si P_σ et P_τ sont semblables sur $\mathbb{K}$, $car(\mathbb{K})=0$.

B] Restriction de l'action à $O_n(\mathbb{R})$

On souhaite ici réduire dans une base orthonormée.

[4] **Def 37 :** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale si ${}^tAA = A{}^tA$.

Thm 38 : Si A est normale, elle est semblable, sous l'action de $O_n(\mathbb{R})$, à une matrice $\begin{pmatrix} D_p & & & 0 \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_k \end{pmatrix}$ où D_p est diagonale et $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ avec $b_i \neq 0$.

App 39 : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

App 40 : Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, D_p est à diagonale unité et les a_i, b_i sont de la forme $a_i = \cos\theta_i$, $b_i = \sin\theta_i$, $\theta_i \in \mathbb{R}$

IV) Action par congruence

On pose ici $\mathbb{K}$ tel que $car(\mathbb{K}) \neq 2$.

[1] **Prop-def 41 :**
$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \\ (P\ ;\ A) & \longmapsto & PA{}^tP \end{array}$$
est une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Deux matrices dans la même orbite sont dites congruentes.

[3] **Def 42 :** Une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$ est une application q de la forme $q : x \mapsto {}^txAx$ où $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. L'application $(x,y) \mapsto {}^txAy$ est la forme polaire associée. q est dite non dégénérée si $\det A \neq 0$.

Rem 43 : L'action de congruence consiste alors à exprimer une forme quadratique à partir d'une autre base. Ainsi, une forme quadratique $q' : x \mapsto {}^txBx$ est dite équivalente à q si A et B sont congruentes.

Def 44 : Soit q une forme quadratique de forme polaire φ. une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ est dite q-orthogonale si $\forall i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Thm 45 : Soit q une forme quadratique. $\mathbb{K}^n$ admet une base q-orthogonale. [3]

Thm 46 : (de Sylvester) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il y a exactement $n+1$ classes de congruences sur $GL_n(\mathbb{R})$ données par $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est équivalente à cette matrice, sa signature est le couple $(p\,;n-p)$

Cor 47 : $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes si et seulement si elles ont même rang et même signatures. [1]

Thm 48 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il y a une seule classe non dégénérée de congruence donnée par I_n. [3]

Cor 49 : $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont congruentes si et seulement si $rg A = rg A'$. [1]

Thm 50 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ est un corps fini, il y a exactement deux classes non dégénérées de congruence données par I_n et $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \notin \mathbb{F}_q^2$ [3]

Cor 51 : $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q) \cap GL_n(\mathbb{F}_q)$ sont congruentes si et seulement si elles ont même déterminant modulo un carré. [1]

App 52 : (DEV 3) (loi de réciprocité quadratique) Soient p, q deux nombres premiers impairs. Alors [4]
$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Références :

- Histoires hédonistes de groupes et de géométrie, tome 1, Caldero [1]
- Algèbre, Gourdon [2]
- Cours d'algèbre, Perrin [3]
- Algèbre et géométrie, Rambaldi [4]
- Algèbre 1, FGN [5]