151

Dimension d'un espace vectoriel (dim $< \infty$). Rang. Ex et App.

Soient k un corps commutatif et E un k-espace vectoriel.

I) Dimension d'un espace vectoriel

A] Familles génératrices, familles libres

Def 1 : Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est :
- génératrice si $\forall u\in E, \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n \in k, u=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$
- libre si $\forall \alpha_1,\dots,\alpha_n\in k, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow \alpha_i=0 \ \forall i$. Elle est dite liée sinon.

E est dit de dimension finie s'il existe une famille génératrice (ce qui sera supposé par la suite). Sinon, E est de dimension infinie.

[7] **Prop 2 :** $(u_1,\dots,u_n)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs s'exprime linéairement en fonction des autres.

Prop 3 : Si $(u_1,\dots,u_n)$ est libre et $u\in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$, alors la décomposition linéaire de u en les u_i est unique.

Def 4 : Une base de E est une famille de vecteurs $\mathcal{B}$ libre et génératrice.

Prop 5 : $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall u\in E, \exists! (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in k^n, u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$. $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est appelé coordonnées de u dans $\mathcal{B}$.

[G] **Ex 6 :** Soient (E) $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0$ et $P(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0\in\mathbb{C}[X]$. On écrit $P(X)=\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et on note : $\forall i\in[\![1;r]\!], \forall k\in[\![0;\alpha_i-1]\!], y_{i,k} : x\longmapsto x^k e^{\lambda_i x}$. Alors $(y_{i,k})_{1\le i\le r,\ 0\le k<\alpha_i}$ forme une base de l'ensemble des solutions de (E).

[7] **Cor 7 :** Si E admet une base à $n\in\mathbb{N}^*$ éléments, alors E est isomorphe à k^n.

Thm 8 : De toute famille génératrice de E on peut extraire une base.

Thm 9 : (de la base incomplète) Toute famille libre de E peut être complétée pour obtenir une base. [7]

B] Théorie de la dimension

Thm-def 10 : (de la dimension) Toutes les bases de E admettent le même nombre d'éléments. Ce nombre est la dimension de E.

Rem 11 : Le choix de k influe sur ce nombre qui sera alors noté $\dim_k E$. Par exemple $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2$ mais $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}=1$.

Ex 12 : La dimension en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n est donc n. L'espace des formes n-linéaires alternées sur k^n est de dimension 1. [G]

Cor 13 : Si $\dim_k E=n$, toute famille de plus de n vecteurs de E est liée. Toute famille de moins de n vecteurs de E ne peut être génératrice.

Prop 14 : Deux espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension. [7]

Thm 15 : Si $n=\dim_k E$, toute famille de n vecteurs de E qui est libre ou génératrice est une base.

Prop 16 : Soient $A\in\mathcal{M}_n(k)$, de commutant $\mathcal{C}(A)$, de polynôme minimal π_A et de polynôme caractéristique χ_A. Alors $\mathcal{C}(A)=k[A]\Leftrightarrow \pi_A=\chi_A$. DEV 1 [5]

C] Sous-espaces, sommes

Prop 17 : Soit $F<E$. Alors F est de dimension finie et $\dim_k F\le \dim_k E$ avec égalité si et seulement si $E=F$.

Def 18 : Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On définit leur somme par $E_1+E_2=\{x_1+x_2 \mid x_1\in E_1, x_2\in E_2\}$. E_1 et E_2 sont dits supplémentaires si $\forall x\in E_1+E_2, \exists! (x_1,x_2)\in E_1\times E_2, x=x_1+x_2$. On note $E_1+E_2=E_1\oplus E_2$. [7]

Thm 19 : $E=E_1\oplus E_2 \Leftrightarrow E=E_1+E_2$ et $E_1\cap E_2=\{0\}$ et dans ce cas $\dim_k E=\dim_k E_1+\dim_k E_2$.

Thm 20 : (Formule de Grassman) Soient E_1 et E_2 deux sous espaces de E. Alors $\dim_k(E_1+E_2) = \dim_k E_1 + \dim_k E_2 - \dim_k E_1 \cap E_2$ [1]

II) Rang d'une application linéaire

A] Définitions et propriétés

Soient E et F deux k-espaces vectoriels de dimensions finies.

Prop 21 : Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $\mathrm{Im}(f) < F$.

Def 22 : On appelle rang de f : $\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im}(f)$.

Prop 23 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors : [1]

- Si f est injective, l'image d'une famille libre par f est libre.
- Si f est surjective, l'image d'une famille génératrice par f est génératrice.

Thm 24 : (du rang) Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\dim E = \dim \ker f + \mathrm{rg} f$

Cor 25 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.

Rem 26 : Ceci n'est plus vrai en dimension infinie. Par exemple, $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ est surjective non injective.

B] Rang d'une matrice, méthodes de calcul

Def 27 : Soient E et F deux k-espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}'$. On appelle matrice de $f \in \mathcal{L}(E,F)$ dans les base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ où $\forall i \in [\![1;n]\!]$, la i-ème colonne sont les coordonnées de $f(e_i)$ dans $\mathcal{B}'$. [1]

Def 28 : Le rang d'une matrice est la dimension de l'espace engendré par ses vecteurs colonnes, noté $\mathrm{rg}(A)$.

Prop 29 : $\mathrm{rg}\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{rg} f$.

Prop 30 : Pour toute matrice A, $\mathrm{rg}\, {}^tA = \mathrm{rg} A$.

Prop 31 : Le rang ne change pas si : [1]

- On ajoute une colonne (ou ligne) à une autre colonne (ou ligne)
- On multiplie une colonne (ou ligne) par un scalaire non nul.

Rem 32 : On peut donc appliquer l'algorithme de Gauss pour trouver le rang d'une matrice.

Prop 33 : Le rang est invariant sous l'action de Steinitz (par équivalence).

Thm 34 : Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$ de rang r. Alors A est équivalente à : $\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}r \\ \}m-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} & \end{array}$. Les orbites sous l'action de Steinitz sont donc les matrices de même rang. [3]

App 35 : Soit $\Omega_r = \{A \in \mathcal{M}_{m,n}(k) \mid \mathrm{rg} A = r\}$ où $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $\overline{\Omega_r} = \bigcup_{k \leq r} \Omega_k$. En particulier, l'ensemble des matrices de rang inférieur à r est fermé dans $\mathcal{M}_{m,n}(k)$.

III) Lien avec les extensions de corps

A] Extensions de corps, extensions de corps engendrées

Def 36 : Une extension de k est la donnée d'un corps K et d'un morphisme de corps de k dans K. En particulier, ce morphisme est injectif, donc $k \hookrightarrow K$.

Prop-def 37 : Soit $k \hookrightarrow K$ une extension. Alors K est un k-espace vectoriel. Si sa dimension est finie, alors on appelle degré de k dans K : $[K:k] = \dim_k K$. On dit alors que l'extension est finie. [2]

Ex 38 : $[\mathbb{C}:\mathbb{R}] = 2$. (On dit que l'extension est quadratique)

Thm 39 : (de la base télescopique) Soient $k \hookrightarrow K$ et $K \hookrightarrow L$ deux extensions finies. Alors $k \hookrightarrow L$ est finie et :
$[L:k] = [L:K][K:k]$

[2]

Def 40 : Soit $A \subset K$. On appelle extension engendrée par A le plus petit corps contenant k et A, noté $k(A)$. Si $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, on le note $k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Def 41 : Soient $k \hookrightarrow K$ et $\alpha \in K$. α est dit algébrique sur k si $\exists P \in k[X]$, $P \neq 0$, $P(\alpha) = 0$. Sinon, il est dit transcendant. $k \hookrightarrow K$ est dite algébrique si tout élément de K est algébrique sur k.

Thm 42 : Soient $k \hookrightarrow K$ et $\alpha \in K$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- α est algébrique sur k
- $k(\alpha) \simeq k[\alpha]$
- $\dim_k k[\alpha] < \infty$

et dans ce cas $\dim_k k(\alpha) = \deg \mathrm{Irr}(\alpha, k)$ où $\mathrm{Irr}(\alpha, k)$ est le polynôme unitaire qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs de α.

Cor 43 : Toute extension finie est algébrique.

Rem 44 : La réciproque est fausse : $k = \mathbb{Q}$, $K = \{z \in \mathbb{C} \mid z$ algébrique sur $\mathbb{Q}\}$.

B] Nombres constructibles.

[4]

Soit $B \subset \mathbb{R}^2$ un nombre fini de points.

Def 45 : $M \in \mathbb{R}^2$ est dit constructible (à la règle et au compas) s'il existe des points $M_1, \dots, M_n = M$ tels que : $\forall i \in [\![1; n]\!]$, M_i est obtenu par :
- soit une intersection de deux droites
- soit une intersection d'une droite et un cercle
- soit une intersection de deux cercles.

où les droites passent par deux points de $B \cup \{M_1; \dots; M_{i-1}\}$ et les cercles centrés en un point de $B \cup \{M_1; \dots; M_{i-1}\}$ et pour rayon la distance entre deux points de cet ensemble.

Un réel est constructible s'il est l'abscisse d'un point constructible. Un polygone est constructible si ses sommets le sont.

[4]

Thm 46 : L'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

Thm 47 : (de Wantzel) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in \mathcal{C}$ si et seulement si il existe $L_1 \hookrightarrow L_2 \hookrightarrow L_3 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow L_n$ des sous-corps de $\mathbb{R}$ tels que :
- $L_1 = \mathbb{Q}$
- $\forall i \in [\![1; n-1]\!]$, $[L_{i+1} : L_i] = 2$
- $x \in L_n$.

Cor 48 : Tout nombre constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré une puissance de 2.

Def 49 : On appelle nombre premier de Fermat un nombre premier de la forme $2^n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

DEV 2 [4]

$\boxed{\text{Thm 50 : (de Gauss) Soit } n \geq 2. \text{ Le polygone régulier à } n \text{ côtés est constructible si et seulement si ses facteurs premiers sont 2, ou des nombres premiers de Fermat.}}$

Références :

- Algèbre linéaire (Grifone) [1]
- Cours d'algèbre (Perrin) [2]
- Histoires hédonistes de groupes et de géométries (Caldero, Germoni) [3]
- Théorie des corps (Carrega) [4]
- Algèbre 2 (Francinou) [5]
- Maths pour l'agreg (Rombaldi) [6]