152

Déterminant. Exemples et applications.

Cadre : E désigne un k-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, k corps quelconque commutatif.

I) Formes alternées, déterminant [1] p.134

Def 1 : On appelle forme p-linéaire toute application $f : E^p \to k$ telle que $\forall (x_1;\dots;x_p) \in E^p$, $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $y_i \longmapsto f(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_p)$ est linéaire.

On note E^* l'ensemble des formes 1-linéaire.

Ex 2 : $E^* \times E \longrightarrow k$, $(\varphi;x) \longmapsto \varphi(x)$ est bilinéaire.

Def 3 : Soit $\varphi : E^p \to k$ une forme p-linéaire. φ est :
- Alternée si $\forall (x_1,\dots,x_p) \in E^p$, $\exists i,j \in [\![1;p]\!]$, $i \neq j$ et $x_i = x_j$, alors $\varphi(x_1,\dots,x_p) = 0$
- Antisymétrique si $\forall (x_1,\dots,x_p) \in E^p$, $\forall \sigma \in S_p$, $\varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\,\varphi(x_1,\dots,x_p)$ où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.

Prop 4 : Si $\mathrm{car}(k) \neq 2$, être alterné est équivalent à être antisymétrique.

Théo-def 5 : $\Lambda_n^*(k)$ est un k-espace vectoriel de dimension 1.

De plus, pour toute base $\mathcal{B} = (x_1,\dots,x_n) \in E^n$ $\exists! f \in \Lambda_n^*(k)$, $f(x_1,\dots,x_n) = 1$.
Cette application, notée $\det_{\mathcal{B}}$, est le déterminant dans la base $\mathcal{B}$.

Prop 6 : Soient $\mathcal{B}$ base de E et $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$. On écrit $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $x_i = (\lambda_{i1},\dots,\lambda_{in})$ dans $\mathcal{B}$. Alors :
$$\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \lambda_{i\sigma(i)}$$

Cor 7 : $\forall f \in \Lambda_n^*(k)$, $\forall \mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ base de E, $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$,
$f(x_1,\dots,x_n) = f(e_1,\dots,e_n)\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$

Théo 8 : $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$ est liée si et seulement si $\exists \mathcal{B}$ base de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n) = 0$.

II) Déterminant matriciel [1] p.136

a) Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice

Prop-def 9 : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ base de E. La quantité $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1),\dots,f(e_n))$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$. On l'appelle déterminant de f, noté $\det f$.

Prop 10 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$
- $\det(\mathrm{id}_E) = 1$
- $f \in GL(E) \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$ et alors $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$

Def 11 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. On appelle déterminant de A : $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$ aussi noté $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Ex 12 : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + gbf + dhc - gec - dbi - ahf$.

Prop 13 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(k)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ canoniquement associé à A dans une base de E. Alors $\det(A) = \det(f)$.

b) Méthodes de calcul du déterminant

Prop 14 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$, $\lambda \in k$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det({}^tA) = \det(A)$
- Le déterminant est inchangé si on ajoute à une colonne (resp. ligne) le multiple d'une autre colonne (resp. ligne).

Def 15 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. On appelle mineur de a_{ij} le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en retirant à A la i-ème ligne et la j-ème colonne. $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ est le cofacteur de a_{ij}.

Prop 16 : Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(k)$
- $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (développement par rapport à la ligne i)
- $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (développement par rapport à la colonne j)

App 17 : $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ (Vandermonde)

+ DEV 1 : couplage des racines via une forme quadratique

Prop 18 : Si $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est triangulaire supérieure alors $\det(A)$ est le produit des éléments diagonaux

Prop 19 : Soit $1 \leq p < n$ et soient $A \in \mathcal{M}_p(k)$, $B \in \mathcal{M}_{n-p}(k)$, $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(k)$. Alors $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$.

III) Utilisation du déterminant en algèbre

a) Dans la résolution de systèmes linéaires [1] p. 186

Def 20 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$. On appelle comatrice de A, notée $\mathrm{com}(A)$, la matrice de ses cofacteurs.

Prop 21 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(k)$, $A \times {}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A) \times A = \det(A) I_n$

Cor 22 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(k)$, $A \in GL_n(k) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ et alors $A^{-1} = \det(A)^{-1}\, {}^t\mathrm{com}(A)$

Cor 23 : Soient $A \in GL_n(k)$ et $B \in k^n$. La solution $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $AX = B$ est donnée par les formules de Cramer :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i = \det(A)^{-1} \left| A_1 \dots A_{i-1}\, B\, A_{i+1} \dots A_n \right|$$

où A_i est la i-ème colonne de A.

Prop 24 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$. A est de rang $r \in [\![1;n]\!]$ si et seulement si il existe une matrice extraite de A de taille r de déterminant non nul et que toute matrice extraite de A de taille $s > r$ est de déterminant nul.

b) Dans la réduction d'endomorphismes [1] p. 161

Def 25 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $\lambda \in k$ est valeur propre de f si $\exists x \in E$, $x \neq 0$, $f(x) = \lambda x$. x est alors un vecteur propre associé à λ. L'ensemble des valeurs propres est le spectre de f noté $Sp(f)$.

Def 26 : On appelle polynôme caractéristique de $f \in \mathcal{L}(E)$ le polynôme : $\chi_f(X) = \det(f - X\, id_E)$

Prop 27 : $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\forall \lambda \in k$, $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$

Théo 28 : (de Cayley-Hamilton)

$\forall A \in \mathcal{M}_n(k)$, $\chi_A(A) = 0$

Def 29 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de f.

Prop 30 : $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, si χ_f est scindé à racines simples dans k alors f diagonalisable.

Cor 31 : Soit P_0 un polygône de $\mathbb{R}^2$. Si P_k est un polygône, on définit P_{k+1} le polygône de sommets les milieux des arrêtes de P_k. Alors les sommets de P_k convergent vers l'isobarycentre de P_0 [1] p. 180

Def 32 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base est triangulaire supérieure.

Théo 33 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé dans k.

IV) Utilisation du déterminant en analyse et géométrie

Ici, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Régularités, application à la résolution d'équations différentielles

Prop 34 : L'application $\det : \mathcal{M}_n(k) \to k$, $A \mapsto \det(A)$ est polynomiale. [2] p. 78

Cor 35 : $\det$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

App 36 : $GL_n(k)$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(k)$.

Def 37 : Soit J un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $Y'(t) = A(t)Y(t)$ (E_H) une équation linéaire homogène avec $A : J \to \mathcal{M}_n(k)$, et $Y : J \to k^n$ dérivable. Soient $(Y_1, \dots, Y_n)$ des solutions de (E_H) et B la base canonique de k^n. On appelle wronskien de $(Y_1, \dots, Y_n)$ l'application définie par :

$\forall t \in J,\ W(t) = \det_{\mathcal{B}}(Y_1(t), \ldots, Y_n(t))$

[4] p.76 **Théo 38 :** Soit $X \in \mathcal{M}_n(k)$. La différentielle de det en X est donnée par :
$\forall H \in \mathcal{M}_n(k),\ d\det_X(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{com}(X) H)$ DEV2

App 39 : Soit (E_A) l'équation $Y' = A(t)Y$ avec $A : J \to \mathcal{M}_n(k)$ continue. Soient $(Y_1, \ldots, Y_n)$ des solutions de (E_A). Alors le wronskien W est dérivable et : $\forall t \in J,\ W'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\, W(t)$
De plus, si A est constante, $\forall t \in J$, $\det(e^{tA}) = e^{t\mathrm{Tr}(A)}$

Cor 42 : $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est un système fondamental de (E_A) si et seulement si $\exists t_0 \in J,\ W(t_0) \neq 0$.

b) Utilisation du déterminant en intégration

Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ et soit λ_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

[2] p.184 **Prop 43 :** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Alors $\forall X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
$\lambda_n(u(X)) = |\det u|\, \lambda_n(X)$

[3] p.239 **Théo 44 :** (de changement de variables) (admis)
Soit $\varphi : \Delta \to D$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme entre deux ouverts Δ et D de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ borélienne. f est λ_n-mesurable si et seulement si $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ l'est, où J_φ est la matrice Jacobienne de φ, et dans ce cas :
$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta f(\varphi(u))\, |J_\varphi|(u)\,du$$

[2] p.184 **Déf 45 :** Soient $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. On appelle parallélépipède engendré par $v_1, \ldots, v_n$ l'ensemble :

$$\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \;\middle|\; \forall i \in [\![1;n]\!],\ \lambda_i \in [0;1] \right\}$$

App 46 : Soient $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Alors : [2] p.184
$$\lambda_n(\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_n)) = |\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n)|$$

Références :

- Les maths en tête : Algèbre (Gourdon) [1]
- Objectif Agrégation (Beck, Malick et Peyré) [2]
- Théorie de l'intégration (Briane, Pagès) [3]
- Petit guide du calcul différentiel (Rouvière) [4]