153

Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

<u>Cadre</u>: Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie sur k un corps commutatif. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $u \neq 0$.

I) Polynômes d'endomorphisme, polynômes annulateurs

A] Algèbre de polynômes d'endomorphisme

[1]

<u>Def 1</u>: Soit $P \in k[X]$, qu'on écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On définit $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ par $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ où $u^k = u \circ \dots \circ u$ k fois et $u^0 = id_E$. On pose alors $k[u] = \{P(u) \mid P \in k[X]\}$.

<u>Rem 2</u>: Si $A \in \mathcal{M}_n(k)$, on définit de manière analogue $P(A) \in \mathcal{M}_n(k)$ et $k[A]$.

<u>Prop 3</u>: $\forall P, Q \in k[u]$, $P(u) \circ Q(u) = PQ(u)$.

<u>Cor 4</u>: $k[u]$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

[2]

<u>Prop 5</u>: Si $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est triangulaire de diagonale $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors $P(A)$ aussi de diagonale $(P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n))$.

<u>Prop 6</u>: Soit $\mathcal{B}$ base de E. Si $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $\forall P \in k[X]$, $P(A) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P(u))$.

<u>Thm 7</u>: Soit $P \in k[X]$. Alors $\{P(\lambda) \mid \lambda \in Sp(u)\} \subset Sp(P(u))$ avec égalité si k est algébriquement clos.

<u>Rem 8</u>: On peut ne pas avoir égalité si k n'est pas algébriquement clos, par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P(X) = X^2$.

<u>Thm 9</u>: (de décomposition des noyaux) Soient $P_1, \dots, P_r \in k[X]$ 2 à 2 premiers entre eux et $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$. Alors $\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u)$. De plus, si π_i est la projection de $\operatorname{Ker} P(u)$ sur $\operatorname{Ker} P_i(u)$ associée à cette somme alors $\forall i \in [\![1; r]\!]$, $\pi_i \in k[u]$.

<u>Rem 10</u>: Ce théorème est en particulier très utile lorsque $P(u) = 0$.

B] Polynômes annulateurs, polynôme minimal

[2]

<u>Prop-def 11</u>: $P \in k[X]$ est dit annulateur de u si $P(u) = 0$. L'ensemble de tels polynômes est un idéal non nul de $k[X]$.

<u>Def 12</u>: $k[X]$ étant principal, cet idéal est engendré par un unique $\pi_u \in k[X]$ unitaire appelé polynôme minimal de u.

<u>Ex 13</u>: Si u est nilpotent d'indice q, alors $\pi_u(X) = X^q$.

<u>Prop 14</u>: $k[u] \simeq k[X]/(\pi_u)$. En particulier, $\dim k[u] = \deg \pi_u$.

<u>Cor 15</u>: $k[u]$ est un corps si et seulement si π_u est irréductible.

[3]

<u>Prop 16</u>: Si $E = F_1 \oplus F_2$ avec F_1 et F_2 stables par u, alors $\pi_u = PPCM(\pi_{u|F_1}, \pi_{u|F_2})$.

[7]

<u>Prop 17</u>: Si $F < E$ est stable par u, alors $\pi_{u|F} \mid \pi_u$.

<u>Prop 18</u>: Si $\lambda \in Sp(u)$ et $P \in k[X]$ est annulateur de u alors $P(\lambda) = 0$.

<u>Rem 19</u>: La réciproque est fausse. Cependant :

<u>Thm 20</u>: $\lambda \in Sp(u) \iff \pi_u(\lambda) = 0$.

C] Polynôme caractéristique

[7]

<u>Def 21</u>: Soit $\mathcal{B}$ base de E. On appelle polynôme caractéristique de u : $\chi_u(X) = \det_{\mathcal{B}}(u - X id_E)$.

<u>Rem 22</u>: χ_u ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$.

<u>Prop 23</u>: Soit $\lambda \in k$. $\lambda \in Sp(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$.

Ex 24 : Si u est nilpotent, $\chi_u(X) = X^n$.

Cor 25 : Si k est algébriquement clos, u admet au moins une valeur propre.

[1] Prop 26 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$ semblables. Alors $\chi_A = \chi_B$.

Prop 27 : Si $F \subset E$ est stable par u, alors $\chi_{u|F} \mid \chi_u$.

Thm 28 : (de Cayley-Hamilton) χ_u est un polynôme annulateur de u.

Cor-def 29 : Supposons χ_u scindé dans k. Soit, pour $\lambda \in Sp(u)$, $m(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u. On définit son sous-espace caractéristique par $F_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)^{m(\lambda)}$. Alors $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} F_\lambda$.

[2] Cor 30 : $\dim k[u] \leq n$.

II) Utilisation dans la réduction des endomorphismes

A] Diagonalisation d'endomorphismes

Def 31 : u est diagonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.

Ex 32 : Toute matrice diagonale est diagonalisable.

Rem 33 : Ceci est équivalent à dire qu'il existe une base de vecteurs propres de u.

[1] Prop 34 : Si u est diagonalisable, alors $P(u)$ de même pour tout $P \in k[X]$.

Lem 35 : Soit $\lambda \in Sp(u)$ et soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$ son sous-espace propre associé. Alors $\dim E_\lambda \leq m(\lambda)$.

Thm 36 : Les assertions suivantes sont équivalentes
- u est diagonalisable
- χ_u est scindé et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim E_\lambda = m(\lambda)$
- π_u est scindé à racines simples
- Il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples.

App 37 : Les symétries et les projecteurs sont diagonalisables. [1]

Cor 38 : Si $F \subset E$ est stable par u et que u est diagonalisable alors $u_{|F}$ de même.

B] Trigonalisation d'endomorphismes

Def 39 : u est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.

Rem 40 : Les endomorphismes diagonalisables sont en particulier trigonalisables. Mais la réciproque est fausse : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. [1]

Thm 41 : u est trigonalisable si et seulement si χ_u (ou π_u) est scindé sur k.

Cor 42 : Si k est algébriquement clos, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Thm 43 : (DEV 1) (Topologie des classes de similitude)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors :
- A est nilpotent si et seulement si 0 est dans l'adhérence de sa classe de similitude. [4]
- A est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

III) Applications des polynômes d'endomorphismes et de la réduction

A] Calculs matriciels et exponentielle

Prop 44 : Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(k)$ tels que $\exists P \in GL_n(k)$, $A = PBP^{-1}$. Alors $\forall P \in k[X]$, $P(A) = P\,P(B)\,P^{-1}$. [2]

Rem 45 : En particulier, si B est diagonale (et donc que A est diagonalisable) ceci nous permet de calculer les puissances de A.

Def 46 : On définit l'exponentielle de A, notée $\exp(A)$, comme la somme de la série absolument convergente $\left(\sum \frac{A^k}{k!}\right)$. On définit de même $\exp(u)$.

Prop 47 : $\exp(A) \in k[A]$.

Prop 48 : Si A et B commutent alors $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

[2]

Thm 49 : (DEV 2) (Décomposition de Dunford) Si χ_u est scindé alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que d est diagonalisable, n est nilpotent et d et n commutent. De plus, d et n sont des polynômes en u.

App 50 : u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exp(u)$ est diagonalisable

Cor 51 : Si $u = d + n$ est la décomposition de Dunford de u, alors $\exp(u) = \exp(d) + \exp(d)(\exp(n) - id)$ est la décomposition de Dunford de $\exp(u)$.

Rem 52 : La décomposition de Dunford est très utile pour le calcul de $\exp(A)$, puisque celui de $\exp(d)$ et $\exp(n)$ est facile. Il nécessite cependant la connaissance de cette décomposition, ce qui peut être difficile.

App 53 : Si $Y : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ vérifie $Y' = AY$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n$ alors $\forall t \in I$, $Y(t) = e^{tA} Y_0$. Il suffit alors de calculer e^{tA} pour trouver Y.

En particulier, les colonnes de e^{tA} forment un système fondamental de $Y' = AY$.

B] Calcul d'inverse et de commutant

Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$.

[1]

Prop 54 : $A \in GL_n(k) \Leftrightarrow \chi_A(0) \neq 0$.

Rem 55 : Ceci permet alors, en connaissant χ_A, d'expliciter A^{-1}. En effet, si $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et que $a_0 \neq 0$, alors $A^{-1} = -a_0^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k A^{k-1}$

Cor 56 : $k[A]^\times = GL_n(k) \cap k[A]$.

App 57 : $\exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]^\times$ est un morphisme de groupe surjectif.

[1]

Def 58 : $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(k) \mid AB = BA\}$ est appelé commutant de A.

Rem 59 : $k[A] \subset \mathcal{C}(A)$.

Thm 60 : $\mathcal{C}(A) = k[A] \Leftrightarrow \pi_A = \chi_A$.

Références :

- Algèbre, Gourdon [1]
- Maths pour l'agreg, Rombaldi [2]
- Objectif agrégation, Beck [3]