154

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Cadre : E désigne un espace vectoriel sur un corps commutatif K.

I) Sous-espaces stables

A] Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Def 1 : $F < E$ est dit stable par u si $u(F) \subset F$.

Ex 2 : $\{0\}$, E sont toujours des espaces stables.

Ex 3 : Une homothétie stabilise tous les sous-espaces de E.

Prop 4 : $\ker u$, $\operatorname{im} u$, sont stables par u.

Prop-def 5 : Soit $F < E$ un sous-espace stable par u. Alors $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$. $u_{|F}$ est appelé endomorphisme induit par u sur F. [2]

Rem 6 : $F \xrightarrow{u} E \longrightarrow E/F$ passe au quotient. Ceci définit alors $\bar{u} : E/F \to E/F$. On a alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[d, "u_{|F}"] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "u"] & E/F \arrow[d, "\bar{u}"] \\ F \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads] & E/F \end{tikzcd}$$

qui est commutatif.

Prop 7 : Soient $\dim E < \infty$ et $F < E$ de dimension r. Soit $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_r)$ une base de F qu'on complète en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ où } A \in \mathcal{M}_r(K),\ C \in \mathcal{M}_{n-r}(K) \text{ et } B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(K)$$

Rem 8 : Ceci permet de lire la stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme.

App 9 : (DEV 1) Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.

App 10 : u nilpotent $\iff u_{|F}$ et $\bar{u}$ sont nilpotents.

Prop 11 : Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u. Alors $\ker u$ et $\operatorname{im} u$ sont stables par v.

App 12 : $\forall P \in K[X]$, $\ker P(u)$ est stable par u.

B] Dualité

Def 13 : Soit $A \subset E$. On définit son orthogonal par $A^{\perp} = \{\varphi \in E^* \mid \varphi_{|A} = 0\}$. Si $B \subset E^*$, on définit son orthogonal par $B^{\circ} = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$

Prop 14 : $A_1 \subset A_2 \subset E \Rightarrow A_2^{\perp} \subset A_1^{\perp}$

$B_1 \subset B_2 \subset E^* \Rightarrow B_2^{\circ} \subset B_1^{\circ}$

Def 15 : On définit la transposée de u par : ${}^t u : E^* \to E^*,\ f \mapsto f \circ u$

Prop 16 : Si $\dim E < \infty$, soit $F < E$. F est stable par u si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par ${}^t u$.

Rem 17 : Ceci est utile dans certains raisonnements par récurrence.

II) Application à la réduction

A] Sous-espaces propres, sous-espaces caractéristiques

On suppose ici $\dim E < \infty$.

Def 18 : On appelle valeur propre de u tout scalaire

[1] $\lambda \in K$ telle que $\exists x \in E$, $u(x) = \lambda x$. x est appelé vecteur propre de u. On note $Sp(u)$ l'ensemble des valeurs propres.

Prop 19: $x \in E$ est vecteur propre si et seulement si la droite $D = Vect(x)$ est stable par u.

[1] **Def 20**: Soit $\lambda \in Sp(u)$. On définit le sous-espace propre associé à λ par $E_\lambda = Ker(u - \lambda id)$

Rem 21: C'est un espace stable par u.

Prop 22: Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres 2 à 2 distinctes. Alors les espaces $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme direct.

Def 23: Soit B une base de E et soit $A = M_B(u)$. On définit le polynôme caractéristique de u par :
$\chi_u(X) = det(XI_n - A)$

Rem 24: χ_u ne dépends pas de B.

Prop 25: $\lambda \in Sp(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$ $\forall \lambda \in K$.

Def 26: Soit $\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ la décomposition en irréductible de χ_u dans une clôture algébrique. On appelle sous-espace caractéristique associé à $\lambda \in Sp(u)$ l'espace $Ker(u - \lambda id)^{m(\lambda)}$

Rem 27: Les espaces caractéristiques sont stable par u.

Prop 28: Soit $F < E$ stable par u. Alors $\chi_{u|F} \mid \chi_u$.

Cor 29: $\forall \lambda \in Sp(u)$, $dim\, E_\lambda \leq m(\lambda)$.

Prop-def 30: L'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal non nul de $K[X]$. On appelle polynôme minimal de u, noté Π_u, le générateur de cet idéal minimal pour le degré et unitaire.

[2] **Prop 31**: Soit $E = F \oplus G$ une décomposition de E en sous-espaces stables par u. Alors $\Pi_u = ppcm(\Pi_{u|F}, \Pi_{u|G})$

B] Lemme des noyaux et conséquences

[2] **Thm 32**: (décomposition des noyaux) Soit $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ dans $K[X]$, avec $P_1, \dots, P_k$ 2 à 2 premiers entre eux. Alors $Ker\, P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker\, P_i(u)$ et les projections sont des polynômes en u.

Cor 33: E se décompose en somme direct de sous-espaces stables par u.

Def 34: u est dit diagonalisable (resp. trigonalisable) s'il existe une base B de E telle que $M_B(u)$ soit diagonale (resp. triangulaire supérieure).

[1] **Thm 35**: Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. u diagonalisable
2. χ_u est scindé sur K et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $dim\, E_\lambda = m(\lambda)$
3. $\exists P \in K[X]$ à racines simples annulateur de u
4. Π_u est scindé à racines simples.

Thm 36: u est trigonalisable si et seulement si χ_u (ou Π_u) est scindé sur K.

Cor 37: Si K est algébriquement clos, tout élément de $\mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.

C] Réduction simultanée

[2] **Prop 38**: Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u. Alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Def 39: u et v sont dits codiagonalisables (resp. cotrigonalisables) s'ils sont diagonalisables (resp.

trigonalisable(s) dans une même base.

Thm 40 : Si u et v commutent et sont diagonalisables (resp trigonalisables) alors ils sont codiagonalisables (resp cotrigonalisables)

Rem 41 : On peut utiliser prop 16 ici.

III] Endomorphismes remarquables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

A] Endomorphismes cycliques

Prop-def 42 : Le sous espace cyclique de f associé à x est le plus petit sous-espace stable par f contenant x. Il est donné par $E_{f,x} = \mathrm{Vect}(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

Prop-def 43 : Soit $x \in E$. Alors $\{P \in K[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ est un idéal non nul de $K[X]$. Son unique générateur unitaire de degré minimal est noté $\Pi_{f,x}$ et appelé polynôme minimal local de f en x.

Prop 44 : $\forall x \in E$, $\dim E_{f,x} = \deg \Pi_{f,x}$

Prop 45 : $\exists x \in E$, $\mu_{f,x} = \mu_f$.

App 46 : $\deg \mu_f \leq \dim E$.

Def 47 : f est dit cyclique si $\exists x \in E, E_{f,x} = E$

Ex 48 : Si $n = \dim E$ et que f a n valeurs propres distinctes alors f est cyclique.

Prop-def 49 : Soit $P \in K[X]$. On appelle matrice compagnon de $P(X) = X^n - \sum_{k=0} a_k X^k$: $C(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Alors $\chi_{C(P)} = P$

Thm 50 : Les assertions suivantes sont équivalentes :

① f est cyclique.

② $\deg \Pi_f = \dim E$

③ $\exists B$ base de E / $\mathcal{M}_B(f) = C(\chi_f)$

App 51 (Cayley-Hamilton) χ_f est polynôme annulateur de f.

Thm 52 : (DEV 2) (Décomposition de Dunford) Si χ_f est scindé sur K, il existe unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f = d + n$, n est nilpotent, d est diagonalisable. De plus, d et n sont des polynômes en f.

App 53 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que χ_A soit scindé sur K. Alors $\exp(A)$ diagonalisable si et seulement si A diagonalisable

B] Endomorphismes semi-simples

Def 53 : f est dit semi-simple si tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable par f.

Ex 54 : Les endomorphismes diagonalisables sont semi-simples.

Thm 55 : f est semi-simple si et seulement si Π_f est sans facteur carré dans $K[X]$.

App 56 : Si $F < E$ est stable par f et que f est semi-simple, alors $f_{|F}$ aussi.

App 57 : Un endomorphisme nilpotent n'est jamais semi-simple.

Cor 58 : Si K est algébriquement clos, f est semi-simple si et seulement si f est diagonalisable.

Références :

- Algèbre, Gourdon [1]
- Objectif agrégation, Beck [2]
- Réduction des endomorphismes, Mansuy - Mneimné [3]
- Cours d'algèbre, Perrin. [4]