155

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Cadre : E désigne un espace vectoriel sur un corps commutatif k de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I) Valeurs propres et polynômes d'endomorphismes

A] Eléments propres d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Def 1 : $\lambda \in k$ est valeur propre de f si $\exists x \neq 0$, $f(x) = \lambda x$. x est alors appelé vecteur propre associé à λ. On note $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

Prop 2 : $x \in E$, $x \neq 0$ est vecteur propre si et seulement si $Vect(x)$ est stable par f. [1]

Prop-def 3 : Soit $\lambda \in Sp(f)$. On définit le sous-espace propre associé à λ par $E_\lambda = Ker(f - \lambda id)$. C'est un sous espace stable par f.

Thm 4 : Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in Sp(f)$ sont 2 à 2 distinctes alors les E_{λ_i} sont en somme directe.

Cor 5 : f a un nombre fini de valeurs propres (au plus n).

Ex 6 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans $\mathbb{R}$, $Sp(A) = \emptyset$. Mais dans $\mathbb{C}$, $Sp(A) = \{\pm i\}$.

B] Polynômes annulateurs, polynôme minimal

Def 7 : Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in k[X]$. On note $P(f) = \sum_{k=0}^{m} a_k f^k$. P est dit annulateur de f si $P(f) = 0$.

Prop 8 : Si $P \in k[X]$ est annulateur de f et $\lambda \in Sp(f)$, alors $P(\lambda) = 0$ [2]

Rem 9 : La réciproque est fausse : $P(X) = X(X-1)$ est annulateur de id_E, mais $0 \notin Sp(id_E)$.

Prop-def 10 : L'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal de $k[X]$. On appelle polynôme minimal son générateur unitaire, noté Π_f.

Prop 11 : Si $F < E$ est stable par f alors $\Pi_{f|F} \mid \Pi_f$.

Thm 12 : $\forall \lambda \in k$, $\lambda \in Sp(f) \iff \Pi_f(\lambda) = 0$.

Rem 13 : La réciproque de prop 8 est donc vraie pour le polynôme minimal.

Thm 14 : (de décomposition des noyaux) Soient $P_1, \dots, P_k$ 2 à 2 premiers entre eux dans $k[X]$ et $P = \prod_{i=1} P_i$. Alors $Ker\, P(f) = \bigoplus_{i=1} Ker\, P_i(f)$. De plus les projections sur chacun de ces sous-espaces sont des polynômes en f.

Rem 15 : Ce lemme trouve particulièrement son utilité si P est annulateur de f, afin de décomposer E en sous-espaces stables par f.

C] Polynôme caractéristique

Def 16 : On appelle polynôme caractéristique de f le polynôme $\chi_f(X) = \det(f - X\,Id)$.

Rem 17 : On définit de même χ_A pour $A \in \mathcal{M}_n(k)$. En particulier, si $A = Mat_B(f)$ dans une certaine base B alors $\chi_A = \chi_f$. [1]

Rem 18 : Les racines de χ_f sont exactement les valeurs propres de f.

Prop 19 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$. Alors $\chi_{{}^tA} = \chi_A$ et si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.

Prop 20 : Si $F < E$ stable par f, alors $\chi_{f|F} \mid \chi_f$.

Prop 21 : Si $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est nilpotente alors $\chi_A(X) = X^n$

Thm 22 : (de Cayley-Hamilton) χ_f est annulateur de f

Cor 23 : $\deg \pi_f \leq n$.

II) Endomorphismes diagonalisables

A] Définition

Def 24 : f est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de f. $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Ex 25 : Les matrices diagonales le sont, en particulier.

Rem 26 : Le choix de k est important : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable pour $k = \mathbb{C}$, mais pas pour $k = \mathbb{R}$.

B] Critères de diagonalisation

Thm 27 : Soit $\lambda \in Sp(f)$. On note $m(\lambda)$ la multiplicité de λ en tant que racine de χ_f. Alors f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et $\forall \lambda \in Sp(f)$, $\dim E_\lambda = m(\lambda)$.

Ex 28 : Si $n \geq 2$, une matrice nilpotente non nulle n'est jamais diagonalisable.

Thm 29 : f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé à racines simples qui l'annule, si et seulement si π_f est scindé à racines simples.

Cor 30 : Si $F < E$ stable par f et que f est diagonalisable alors $f_{|F}$ est diagonalisable.

Ex 31 : Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

C] Réduction simultanée

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.

Prop 32 : Si f et g commutent, les sous-espaces propres de g sont stables par f.

Def 33 : f et g sont codiagonalisables s'ils sont diagonalisables dans une base commune.

Thm 34 : f et g sont codiagonalisables si et seulement si ils commutent et sont diagonalisables.

App 35 : Si $\mathrm{car}\, k \neq 2$, $GL_n(k) \simeq GL_m(k) \Leftrightarrow n = m$.

III) Réduction dans un espace euclidien/hermitien

On suppose ici que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et que E est muni d'une structure d'espace euclidien ou hermitien.

A] Endomorphismes normaux

Prop-def 36 : $\exists! f^* \in \mathcal{L}(E)$, $\forall x, y \in E$, $\langle x | f(y) \rangle = \langle f^*(x) | y \rangle$. f^* est appelé adjoint de f. f est dit auto-adjoint si $f^* = f$. f est dit normal si $ff^* = f^*f$.

Rem 37 : Si $M = \mathcal{M}_B(f)$ où B est orthonormée, alors $\mathcal{M}_B(f^*) = \mathcal{M}_B(f)^*$.

Lem 38 : Si $F < E$ est stable par f, alors $F^\perp$ aussi.

Thm 39 : (Cas $k = \mathbb{C}$) Tout endomorphisme normal est diagonalisable dans une base orthonormée.

Ex 40 : Toute matrice hermitienne se diagonalise dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont de module 1.

Par la suite, $k = \mathbb{R}$.

[1]

Prop 41 : f admet une droite ou un plan stable.

Thm 42 : ($k=\mathbb{R}$) Si f est normal, alors il existe $\mathcal{B}$ orthonormée telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & C_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & C_s \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ dans le spectre de f et $C_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$.

App 43 : (théorème spectral) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

App 44 : Si $f \in O(E)$, alors $\forall i \in [\![1;r]\!], \lambda_i = \pm 1$ et les C_i sont de la forme $C_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$.

B] Cas des matrices symétriques définies positives

Ici, $k = \mathbb{C}$.

[1]

Def 45 : Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. H est dite :
- positive si $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $X^* H X \geq 0$. On note H_n^+ l'ensemble de telles matrices.
- définie positive si en plus $X^* H X = 0 \Leftrightarrow X = 0$. On note H_n^{++} l'ensemble de telles matrices.

Prop 46 : Si $H \in H_n^+$, $Sp(H) \subset \mathbb{R}_+$. Si $H \in H_n^{++}$, $Sp(H) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Cor 47 : $H_n^{++} = GL_n(\mathbb{C}) \cap H_n^+$.

Thm 48 : (DEV 1) (Décomposition polaire) Soit U_n l'ensemble des matrices unitaires. Alors $\phi : \begin{array}{l} H_n^{++} \times U_n \to GL_n(\mathbb{C}) \\ (H ; U) \mapsto HU \end{array}$ est un homéomorphisme.

IV) Applications de la réduction

A] Décomposition de Dunford

[1]

Def 49 : Soit $\lambda \in Sp(f)$. On appelle sous-espace caractéristique associé à λ : $N_\lambda = \ker(f - \lambda id)^{m(\lambda)}$

Rem 50 : N_λ est stable par f.

[2]

Thm 51 : (DEV 2) (Décomposition de Dunford) Si χ_f est scindé sur k, il existe un unique couple $(d;n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f = d + n$, d diagonalisable et n nilpotente. De plus, d et n sont des polynômes en f.

App 52 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que χ_A soit scindé dans $\mathbb{R}$. Alors A est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ l'est.

Rem 53 : La décomposition de Dunford est très utile pour calculer les exponentielles de matrices, dans la théorie des équations différentielles linéaires par exemple.

B] Conséquences topologiques

On notera ici $D_n(k)$ l'ensemble des matrices diagonalisables et T_n les matrices trigonalisables (= semblable à une matrice triangulaire supérieure).

[1]

Thm 54 : $\overline{D_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En revanche, $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$.

App 53 : On peut démontrer le théorème de Cayley-Hamilton sur $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec ces résultats de densité.

[1]

App 54 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp(A)) = \exp(Tr(A))$

Références :

- Algèbre, Gourdon [1] ++
- Maths pour l'agreg, Rombaldi [2]
- Objectif agrégation, Beck [3]