156

Exponentielle de matrices. Applications.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I] Exponentielle d'une matrice

A] Définitions et propriétés

Par la suite, $\|\cdot\|$ désignera une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (par exemple une norme subordonnée).

[1] **Prop 1:** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace de Banach.

Prop-def 2: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La série $\left(\sum \frac{A^n}{n!}\right)$ converge absolument dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sa somme est appelée exponentielle de A notée e^A ou $\exp(A)$.

Ex 3: Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $\forall i \in [\![1;n]\!]$, alors $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$. Donc $e^{0_n} = I_n$.

Rem 4: Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$, on peut définir de la même façon l'exponentielle de u.

[3] **Prop 5:** $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$

Prop 6: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$. L'exponentielle de matrice préserve ainsi les classes de similitude.

Cor 7: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$

Rem 8: Ceci implique en particulier que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \subset GL_n(\mathbb{K})$.

[1] **Prop 9:** Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

[1] **Rem 10:** Cette propriété est fausse si A et B ne commutent pas : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cor 11: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $e^A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

B] Lien avec les polynômes de matrices

[1] **Prop-def 12:** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On définit $P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$. Alors ceci induit le morphisme d'ev : $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \mapsto P(A)$. On note $\mathbb{K}[A]$ son image, qui est une $\mathbb{K}$-sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prop 13: Soit μ_A le polynôme minimal de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathbb{K}[A] \simeq \mathbb{K}[X]/(\mu_A)$. En particulier, $\mathbb{K}[A]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\deg \mu_A$.

Cor 14: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$

[3] **Rem 15:** Il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\exp(A) = P(A)$. Cependant il n'est pas toujours aisé de trouver P, qui n'est pas forcément de la forme $\sum_{k=0}^{m} \frac{X^k}{k!}$.

Ex 16: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice p. Alors $P(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{X^k}{k!}$ convient.

[1] **Cor 17:** Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\exp(u)) = \exp(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$. Ceci permet alors de confondre $\exp(u)$ avec $\exp(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$.

C] Méthodes de calcul

[3] **Thm 18:** (DEV 1) (Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (d, n) de $\mathcal{L}(E)^2$ tel que

$u = d + n$, d diagonalisable, n nilpotent et $dn = nd$. De plus, d et n sont des polynômes en u.

[3] **Cor 19 :** Si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A, alors celle de e^A est : $e^A = e^D + e^D(e^N - I)$

App 20 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ l'est.

[4] **Rem 21 :** En utilisant Ex 16, Ex 3 et Prop 9, on peut aisément calculer $\exp(A)$ en connaissant sa décomposition de Dunford. Cette dernière reste cependant difficile à calculer.

Meth 22 : Si $\chi_A = \prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{m_k}$, $Q_i = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} (X-\lambda_k)^{m_k}$ et $U_1, \dots, U_r \in \mathbb{K}[X]$ vérifient $\sum_{i=1}^{r} U_i Q_i = 1$, alors le théorème de décomposition des noyaux nous dit que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^{m_i}$ avec pour projection $\pi_i = U_i Q_i(A)$.
La connaissance des π_i nous permet alors de calculer D et N. Pour trouver $U_1, \dots, U_r$, on peut décomposer $\frac{1}{\chi_A}$ en éléments simples.

[3] **Thm 23 :** (Réduction de Jordan) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $J_i \in \mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{K})$ et $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ \varepsilon_1 & \ddots & \\ 0 & \varepsilon_p & \lambda_i \end{pmatrix}$

Rem 24 : Si une telle décomposition est connue, on sait calculer l'exponentielle de A, puisque la décomposition de Dunford des J_i est clairement visible.

II) L'exponentielle matricielle en tant qu'application

[3] **Thm 25 :** $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$ est de classe C^∞ (donc en particulier continue) et : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

[3] $$d\exp_A(H) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i+j=k-1\\0\leq i,j\leq k-1}} A^i H A^j$$

Cor 26 : Si $AH = HA$, $d\exp_A(H) = \exp(A)H$.

$\boxed{\text{Thm 27 : (DEV 2) } \exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \text{ est surjective}}$

[3] **Rem 28 :** Ce résultat n'est plus vrai sur $\mathbb{R}$. En fait, $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \subset GL_n^+(\mathbb{R})$.

Cor 29 : Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors $\exists X \in \mathbb{C}[A]^\times$ / $X^p = A$.

Rem 30 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ n'est pas injective : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\exp(2ik\pi I) = I$.

Prop-def 31 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A - I\| < 1$. Alors $\left(\sum \frac{(-1)^k}{k}(A-I)^k\right)$ converge absolument et on note $\ln(A)$ sa somme, appelé logarithme de A.

Lem 32 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A\| < 1 \Rightarrow \exp(\ln(I+A)) = I + A$

Def 33 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite unipotente si $A - I$ est nilpotente. On note $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de telles matrices.

Thm 34 : $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est bijective.

Thm 35 : exp réalise une bijection de l'ensemble des matrices hermitiennes (resp. symétriques réelles) dans l'ensemble des matrices hermitiennes (resp. symétriques réelles) définies positives.

III) Application dans l'étude des équations différentielles linéaires

[5] **Def 36 :** Une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{K}^n$ est une équation différentielle de la forme (E) $Y' = A(t)Y + B(t)$

où $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ sont continues.

[5] **Thm 37** : (de Cauchy-Lipschitz linéaire) Le problème de Cauchy associé à (E) admet une unique solution maximale pour toute condition initiale. De plus, cette solution est globale (définie sur $\mathbb{R}$).

Cor 38 : L'espace des solutions de (E) est un espace affine de dimension n et de direction les solutions de (E_H) $Y' = A(t)Y$.

Def 39 : On appelle base fondamentale de (E) toute base des solutions de (E_H).

Nous considérerons par la suite que A est constante.

[3] **Lem 40** : Soit $\phi_A : \mathbb{R} \to \exp(tA)$. Alors ϕ_A est C^1 et : $\forall t \in \mathbb{R}, \phi_A'(t) = A.\exp(tA) = \exp(tA).A$.

Rem 41 : On peut démontrer prop 9 en utilisant ce lemme.

[8] **Thm 42** : Soit Y une solution de (E_H) et $Y_0 = Y(0)$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = e^{tA} Y_0$.

Cor 43 : Les colonnes de e^{tA} forment une base fondamentale de (E).

[2] **Rem 44** : Ceci nous permet alors d'avoir toutes les solutions de (E_H), sous réserve qu'on sache calculer l'exponentielle de tA. Cependant, à défaut de savoir le calculer, on peut prédire l'allure des solutions en fonction des valeurs propres de A.

[7] **Ex 45** : Dans le cas $n = 2$, on a les trois cas suivants

- Cas 1 : A a deux valeurs propres réelles distinctes
- Cas 2 : A a deux valeurs propres complexes non réelles conjuguées
- Cas 3 : A a une valeur propre double. [4]

On peut alors prédire l'allure des solutions dans ces trois cas grâce à Thm 42.

Thm 46 : Soient Y une solution de (E) et $Y_0 = Y(0)$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = e^{tA} Y_0 + \int_0^t e^{(t-u)A} B(u)\,du$

Rem 47 : En pratique, on utilise plutôt la méthode de variations des constantes : on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $Y(t) = e^{tA} C(t)$ où $C : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ est C^1. Ceci donne alors $e^{tA} C'(t) = B(t)$ et on intègre pour trouver C.

Def 48 : On appelle équation différentielle linéaire d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ toute équation différentielle de la forme (E') $y^{(p)} + a_p y^{(p-1)} + \dots + a_1 y = b(t)$ où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. [5]

Rem 49 : En posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$, on ramène l'étude à ce qui a été fait précédemment.

Thm 50 : Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+1} X^k + X^p = \prod_{j=1}^{s} (X - \lambda_j)^{m_j}$

Alors $(t \mapsto t^k e^{\lambda_j t})_{\substack{1 \le j \le s \\ 0 \le k \le m_j - 1}}$ forme une base fondamentale de (E').

Rem 51 : En utilisant la méthode de variation des constantes au système équivalent de Rem 49, on en déduit toutes les solutions de (E').

Références :

- Algèbre, Gourdon [1]
- Analyse, Gourdon [2]
- Algèbre et géométrie, Rombaldi [3]
- Éléments d'analyse, Queffélec-Zuily [4]
- Analyse numérique et équations différentielles, Demailly [5].