157

Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Cadre: Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$.

I) Endomorphismes trigonalisables

A] Polynômes d'endomorphismes

[1]

Prop-def 1: Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. L'ensemble des polynômes annulateurs de f est un idéal non vide de $\mathbb{K}[X]$. On note π_f son générateur unitaire appelé polynôme minimal de f.

Rem 2: Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit π_A similairement. En particulier, si A est la matrice de f dans une base $\pi_A=\pi_f$.

Ex 3: $\pi_{I_n}(X)=X-1$.

Prop 4: Les racines de π_A sont les valeurs propres de A.

Def 5: Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On définit le polynôme caractéristique de f par $\chi_f(X)=\det_{\mathcal{B}}(X\mathrm{id}-f)$

Rem 6: χ_f ne dépends pas de $\mathcal{B}$. On définit similairement χ_A et si $A=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$, alors $\chi_A=\chi_f$.

Thm 7: (de Cayley-Hamilton) χ_f est polynôme annulateur de f.

Cor 8: $\deg\pi_f\le n$.

[3]

Prop 9: L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}[X]$, $A\mapsto\chi_A$ est continue.

Prop 10: Soit $F<E$ un sous-espace stable par f. Alors $\pi_{f|F}\mid\pi_f$ et $\chi_{f|F}\mid\chi_f$.

[1]

Lem 11: (des noyaux) Soient $P_1,\dots,P_r\in\mathbb{K}[X]$ 2 à 2 premiers entre eux et $P=\prod_{i=1}^{r}P_i$. On a alors $\ker P(f)=\bigoplus_{i=1}^{r}\ker P_i(f)$ et les projections associées sont des polynômes en f.

[1]

B] Endomorphismes trigonalisables

Def 12: f est trigonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire supérieure.

Rem 13: A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Ex 14: Les matrices triangulaires sont trigonalisables [1]

Thm 15: f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Cor 16: Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout élément de $\mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.

App 17: Soit $\mathcal{C}(A)$ le commutant de A. Alors $\mathbb{K}[A]=\mathcal{C}(A)$ si et seulement si $\pi_A=\chi_A$.

Cor 18: Si $F<E$ est stable par f et que f est trigonalisable alors $f_{|F}$ de même.

Cor 19: L'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. [3]

App 20: $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathbb{K}[X]$, $A\mapsto\pi_A$ n'est pas continue.

Rem 21: L'adhérence des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$.

C] Trigonalisation simultanée

Soit $g\in\mathcal{L}(E)$.

Lem 22: Si f et g commutent, les sous-espaces propres de f sont stables par g. [1]

Thm 23: f et g se trigonalisent dans une même base si et seulement si ils commutent et sont trigonalisables

II) Endomorphismes nilpotents

A] Définitions et caractérisations

[2] **Def 24 :** f est dit nilpotent si $\exists k \in \mathbb{N}^* / f^k = 0$.

Rem 25 : On définit de même les matrices nilpotentes

Ex 26 : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X],\ P \mapsto P'$ sont nilpotents.

Def 27 : Si f est nilpotent, son indice de nilpotence est $\min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^k = 0\}$.

[3] **Prop 28 :** Si f est nilpotent, $\mathrm{Tr}(f) = 0$ et $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$

[2] **Rem 29 :** La réciproque est fausse : la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de trace nulle et sa seule valeur propre sur $\mathbb{R}$ est 0. Cependant :

[3] **Thm 30 :** Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, f est nilpotent si et seulement si $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

Thm 31 : Si $\mathrm{Car}(\mathbb{K}) = 0$, f est nilpotent si et seulement si $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{Tr}(f^k) = 0$.

Rem 32 : Si f est nilpotent d'indice q, alors $\pi_f(X) = X^q$ et $\chi_f(X) = X^n$

Cor 33 : Si $F \subset E$ est stable par f et que f est nilpotent alors $f_{|F}$ de même.

[4] **Lem 34 :** (DEV 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dans la classe de similitude de A, on peut trouver des matrices triangulaires supérieures avec des coefficients au-dessus de la diagonale arbitrairement petits.

Thm 35 : A est nilpotent si et seulement si 0 adhère à sa classe de similitude. A est diagonalisable ssi elle est fermée.

B] Cône nilpotent

[2] On note $\mathcal{N}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists k \in \mathbb{N}^*, A^k = 0\}$.

Prop 36 : $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ est un cône : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K}), \lambda A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$.

Rem 37 : $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un idéal de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotents, mais pas leur somme.

Ex 38 : Pour $n = 2$, on peut aisément déterminer $\mathcal{N}_2(\mathbb{K})$: ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + bc = 0$.

Prop 39 : Si $A, B \in \mathcal{N}_n(\mathbb{K})$ commutent, alors $A + B$ et AB sont dans $\mathcal{N}_n(\mathbb{K})$.

Thm 40 : $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

C] Matrices unipotentes

[3] **Def 41 :** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unipotente si $A - I_n$ est nilpotente.

Ex 42 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$ alors A est unipotente et réciproquement.

On note $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices unipotentes.

Def 43 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < 1$. On définit le logarithme de $I_n + A$ par $\ln(I_n + A) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{A^n}{n}$

Rem 44 : En particulier, si A est unipotente, on peut calculer explicitement $\ln(A)$.

Thm 45 : Les applications $\exp : \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $\ln : \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ sont bien définies et réciproques l'une de l'autre.

Rem 46 : Ce sont en particulier des homéomorphismes.

III) Applications à la réduction

A] Décomposition de Dunford

[3] **Thm 47 :** (DEV2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d diagonalisable, n nilpotent, qui commutent avec $f = d+n$. De plus, ce sont des polynômes en f.

Cor 48 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la décomposition de Dunford de $\exp(f)$ est $e^f = e^d + e^d(e^n - id)$

App 49 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f est diagonalisable si et seulement si $\exp(f)$ l'est.

Ex 50 : La décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rem 51 : La décomposition de Dunford est pratique pour calculer une exponentielle de matrice mais reste difficile à obtenir.

[3] **Cor 52 :** Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ est tel que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, il existe un unique couple (D,U) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec D diagonalisable inversible, U unipotente qui commutent telles que $A = DU$.

B] Décomposition de Jordan

[2] **Def 53 :** On appelle bloc de Jordan de taille $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

Rem 54 : Les blocs de Jordan sont des matrices nilpotentes.

Prop 55 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique nilpotente si et seulement si la matrice de u dans une base est J_n.

Lem 56 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q. Il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tel que $E = F \oplus G$ avec $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ et $G^\perp = \mathrm{Vect}(\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, {}^t u^{q-1}(\varphi))$ [2]

Thm 57 : (décomposition de Jordan) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, sa matrice dans une base est de la forme $\begin{pmatrix} J_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_r} \end{pmatrix}$ avec $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r \leq n$ de façon unique.

Cor 58 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, avec χ_f scindé, il existe une base où sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}$ de façon unique avec $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{p_i} \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ où $Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et $\varepsilon_j = 0$ ou 1 $\forall j \in [\![1, p_i]\!]$.

App 59 : Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à sa transposée. [4]

Références :

- Algèbre, Gourdon [1]
- Objectif agrégation, Beck [2]
- Algèbre et géométrie, Rombaldi [3]
- Algèbre 1, FGN. [4]