158 — Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I] Matrices symétriques, hermitiennes

A] Définitions

Def 1 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite :
- symétrique réelle si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et ${}^tA = A$
- hermitienne si $A^* = A$ où $A^* = {}^t\overline{A}$

Par la suite, si $\mathbb{K}$ n'est pas précisé, une matrice symétrique sera une matrice qui vérifie l'une de ces propriétés (qu'on peut englober dans $A^* = A$).

Ex 2 : Les matrices diagonales réelles sont symétriques.

Ex 3 : Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M^*M et MM^* sont symétriques.

Rem 4 : La diagonale d'une matrice hermitienne est à coefficients réels.

On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$) l'ensemble des matrices symétriques réelles (resp. hermitiennes) de taille n.

Prop 5 : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriels de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et n^2 respectivement.

Rem 6 : $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Cor 7 : Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices antisymétriques. Alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Def 8 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétrique. A est dite :
- positive si $\forall X \in \mathbb{K}^n$, $X^*AX \geq 0$. On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- définie positive si $\forall X \in \mathbb{K}^n$, $X^*AX > 0$ si $X \neq 0$. On note de même ces matrices $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Ex 9 : Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{K}^n$, $A = (\langle e_i | e_j \rangle)$ est symétrique définie positive.

Prop 10 : $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) = \mathcal{H}_n^+(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C})$.

B] Endomorphismes, formes bilinéaires/hermitiennes symétriques

Soit E un espace euclidien ou hermitien de dimension n.

Prop-def 11 : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists!\, u^* \in \mathcal{L}(E)$ / $\forall x, y \in E$, $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$. u^* est appelé adjoint de u.

Def 12 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit autoadjoint si $u^* = u$.

Prop 13 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Def 14 : Soit $f : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire par rapport à la première variable.
- f est symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f(x,y) = f(y,x)$ $\forall x, y \in E$
- f est hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$ $\forall x, y \in E$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une $\mathbb{K}$-base de E. On définit la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ par $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.
Le rang de f est $rg(f) = rg(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))$.

Prop 15 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
- f est symétrique si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
- f est hermitienne si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$.

Def 16 : Soit $q : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x,x)$. q est :
- une forme quadratique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et f est symétrique.
- une forme quadratique hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et f est hermitienne.

Prop 17 : Soient f une forme symétrique ou hermitienne et q sa forme quadratique. On a les formules de polarisation :

[2] ④ si f symétrique : $\forall x,y \in E$, $f(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$

④ si f est hermitienne : $\forall x,y \in E$, $f(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y) - iq(x+iy) + iq(x-iy)\right)$

[4] Cor 18 : f est entièrement déterminée par q et est appelée forme polaire de q.

II) Réduction des matrices symétriques et conséquences

A] Théorèmes spectraux

[3] Lem 18 : $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$.

Thm 19 (spectral) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une $\mathbb{R}$-base orthonormée.

[2] Thm 20 : (spectral) Toute matrice hermitienne est diagonalisable dans une $\mathbb{C}$-base orthonormée. En particulier, $\forall A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$.

Rem 21 : Ceci signifie que :

④ $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ $({}^tPP = P{}^tP = I)$ / ${}^tPAP$ soit diagonale

④ $\forall A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, $\exists P \in U_n(\mathbb{C})$ $(P^*P = PP^* = I)$ / P^*AP soit diagonale.

Cor 22 : Soit q une forme quadratique (resp. quadratique hermitienne) sur E espace euclidien (resp. hermitien). Il existe une base orthonormée de E dans laquelle q est à diagonale réelle.

[2] Prop 23 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique définie positive, alors $\langle x,y \rangle_A = {}^*xAy$ est un produit scalaire sur $\mathbb{K}^n$. On note $\|\cdot\|_A$ sa norme.

Cor 24 : Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétriques, M étant définie positive. Alors $\exists C \in GL_n(\mathbb{K})$ / $C^*MC = I$ et C^*NC diagonale.

B] Conséquences sur les matrices positives

[3] Thm 25 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétrique. A est positive (resp. définie positive) si et seulement si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$)

Prop 26 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétrique positive. Alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétrique positive telle que $A = B^2$.

[3] Thm 27 : [DEV 1] (décomposition polaire) L'application
$$\phi : \begin{array}{ccc} U_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ (U, H) & \longmapsto & UH \end{array}$$
est un homéomorphisme.

Rem 28 : On a le même résultat pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Thm 29 : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est bijective.

Rem 30 : $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ est de même bijective.

Lem 31 : Soit $\|\cdot\|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme associée au produit scalaire de $\mathbb{K}^n$. Alors, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique, $\|A\|_2 = \rho_{\mathbb{C}}(A)$ où $\rho_{\mathbb{C}}$ est le rayon spectral.

Thm 32 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$

C] Classification des formes quadratiques

[4] Def 33 : Soient q et q' deux formes quadratiques (ou quadratiques hermitiennes) sur E. q est dite équivalente à q' si $\exists u \in GL(E)$, $q' = q \circ u$.

Rem 34 : Si A et A' sont des matrices de q et q', ceci est équivalent à dire que $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A' = P^*AP$.

Def 35 : Soit f une forme sesquilinéaire symétrique ou hermitienne. $x, y \in E$ sont f-orthogonaux si $f(x,y) = 0$

Thm 36 : Il existe une base f-orthogonale de E.

Thm 37 : (de Sylvester) Il existe exactement $n+1$ classes de formes quadratiques (ou formes quadratiques hermitiennes) de rang n, qui ont pour représentants les matrices $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, $p+q = n$, $0 \leq p,q \leq n$, $q \neq n$.

Rem 38 : Matriciellement, ce résultat n'est pas un cas particulier du théorème spectral puisque la matrice de changement de base n'est pas nécessairement orthogonal ou unitaire.

[4] **Def 39**: Soit q une forme quadratique (ou forme quadratique hermitienne) sur E. Alors q est équivalent à l'un des $I_{p,p'}$. (p,p') est appelé signature de q.

III) Utilisation des matrices symétriques en analyse

A] En calcul différentiel

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Thm 40: (de Schwarz) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors $\forall a \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$

Def 41: On définit, pour $f : U \to \mathbb{R}$ C^2, la matrice Hessienne de f par $\mathrm{Hess}_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \le i,j \le n}$. C'est une matrice symétrique d'après Thm 40.

[1] **Thm 42**: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Si $a \in U$ est un minimum local, alors $\mathrm{Hess}_f(a)$ est positive.

Rem 43: La réciproque est fausse : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $\mathrm{Hess}_f(0) = (0)$ mais 0 n'est pas minimum local.

Thm 44: Soit $a \in U$ tel que $\mathrm{Hess}_f(a)$ est définie positive. Alors a est minimum local strict de f.

[5] **Thm 45**: (Lemme de Morse) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3 telle que $0 \in U$, $df_0 = 0$, $d^2 f_0$ est inversible. Soit $(p, n-p)$ sa signature. Alors, à un C^1 difféomorphisme près, on a $\forall x \in U$, $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{n} x_j^2$

B] Résolution de systèmes linéaires

[3] **Thm 46**: Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si ses mineurs principaux sont strictement positifs.

App 47: $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

[3] **Thm 48**: (décomposition de Cholesky) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe un unique $B \in GL_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à diagonale positive tel que $A = {}^tBB$.

Rem 49: On peut alors résoudre facilement $AX = b$ en résolvant ${}^tB\,Y = b$ puis $BX = Y$.

[7] **Thm 50**: (de Kantorovitch) Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda_{min} = \min_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$, $\lambda_{max} = \max_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$. Alors :

$$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_{A^{-1}}^2 \, \|x\|_A^2} \geq 4 \frac{\lambda_{max}\lambda_{min}}{(\lambda_{max}+\lambda_{min})^2}$$

Thm 51: Soit ϕ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\phi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$. On définit, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite (x_k) par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{k+1} = x_k \text{ si } \nabla\phi(x_k) = 0 \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\phi(x_k) \text{ où } \alpha_k = \underset{t>0}{\mathrm{argmin}}\, \phi(x_k - t\nabla\phi(x_k)) \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \bar{x}$ où $\bar{x} = A^{-1}b$ et : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \left(\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \right)^{k+1} \|x_0 - \bar{x}\|$

C'est l'algorithme du gradient à pas optimal.

DEV2

Références :

- Analyse, Gourdon [1]
- Algèbre, Gourdon [2]
- Algèbre et géométrie, Rombaldi [3]
- Cours d'algèbre, Perrin [4]
- Petit guide de calcul différentiel, Rouvière [5]
- Algèbre linéaire, Grifone [6]
- Analyse pour l'agreg, Bernis [7]