159

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Cadre : E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ étant un corps commutatif.

I | Formes linéaires et dual

A] Formes linéaires

Def 1 : On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire φ de E dans $\mathbb{K}$.

Rem 2 : On peut parfois noter $\varphi(x) = \langle \varphi | x \rangle$.

Ex 3 : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on définit $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Alors e_i^* est une forme linéaire sur E pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

Ex 4 : La différentielle d'une application différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$ en un point est une forme linéaire.

[1] Prop 5 : Une forme linéaire non nulle sur E est surjective.

Def 6 : $H < E$ est un hyperplan si $\dim H = n-1$.

Rem 7 : Cette définition se généralise en dimension infinie : H est un hyperplan si $\exists x \in E \,/\, E = H \oplus \mathbb{K}x$.

Thm 8 : Soit $H < E$. H est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une application linéaire non nulle.

Rem 9 : Ce résultat est encore vrai en dimension infinie.

Prop 10 : Deux formes linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont colinéaires.

B] Espace dual

[1] Def 11 : On appelle dual de E, noté E^*, l'ensemble des formes linéaires sur E.

Thm 12 : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors E^* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n dont $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base. $\begin{array}{l} E \to E^* \\ e_i \mapsto e_i^* \ \forall i \end{array}$ est ainsi un isomorphisme de E sur E^*.

Rem 13 : Cet isomorphisme n'est pas canonique dans le sens où il dépend d'une base de E. On a cependant des situations où l'isomorphisme est canonique :

[1] Prop 14 : $\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \longmapsto & (M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)) \end{array}$ est un isomorphisme.

App 15 : Si $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ vérifie $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(XY) = f(YX)$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f = \lambda \, \mathrm{Tr}$.

Thm 16 : (de Riesz) On suppose que E est euclidien ou hermitien (et donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors $\begin{array}{l} E \to E^* \\ a \mapsto \langle a | \cdot \rangle \end{array}$ est un isomorphisme.

[3] Ex 17 : Si $E = \mathbb{K}_n[X]$, on peut prendre $(X^i)_{0 \le i \le n}$ la base canonique. La base duale de E^* est alors donnée par les coefficients de Taylor.

App 18 : (DEV 1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de racines $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbb{C}$ de multiplicités $m_1, \dots, m_q$. Soit $s_i = \sum_{k=1}^{q} m_k \alpha_k^i$ et $S(x) = \sum_{i,j=0}^{n-1} s_{i+j} x_i x_j$ de signature (s,t). Il y a $(s+t)$ racines complexes distinctes, et $(s-t)$ racines réelles distinctes.

C] Bidual et base antéduale

Def 19 : Le bidual de E est le dual de E^* : E^{**}.

[1] Thm 20 : Si $x \in E$, on note $\tilde{x} : \begin{array}{l} E^* \to \mathbb{K} \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{array}$. Alors $f : \begin{array}{l} E \to E^{**} \\ x \mapsto \tilde{x} \end{array}$ est un isomorphisme.

Rem 21 : Cet isomorphisme ne dépend cette fois-ci d'aucune base.

Thm 22 : Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $e_i^* = f_i \ \forall i$

cette base est appelée base antéduale de $(f_1,\dots,f_n)$.

Rem23: Nous donnerons des moyens de calculer cette base dans la partie III.

II) Orthogonalité et application transposée

A] Orthogonalité

Déf24: $\varphi\in E^*$ et $x\in E$ sont dits orthogonaux si $\varphi(x)=0$.

[1] Rem25: Dans le cas euclidien ou hermitien, ceci se traduit par une orthogonalité au sens d'un produit scalaire.

Ex26: Si $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ est la base duale de $(e_1,\dots,e_n)$, $\forall i\neq j$, e_i^* est orthogonal à e_j.

Déf26: Soient $A\subset E$ et $B\subset E^*$. On définit l'orthogonal de A et l'orthogonal de B par:

[2] $A^\perp=\{\varphi\in E^* \mid \forall x\in A, \varphi(x)=0\}$

$B^\circ=\{x\in E\mid \forall\varphi\in B, \varphi(x)=0\}$

Prop 27: Si $A_1\subset A_2\subset E$ alors $A_2^\perp\subset A_1^\perp$. Si $B_1\subset B_2\subset E^*$ alors $B_2^\circ\subset B_1^\circ$. De plus, $A_1^\perp=\mathrm{Vect}(A_1)^\perp$ et $B_1^\circ=\mathrm{Vect}(B_1)^\circ$.

[4] App28: Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable. On pose, pour $a\in\mathbb{R}$, $f_a: x\mapsto f(x+a)$. $\mathrm{Vect}(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est de dimension finie dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ si et seulement si f est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

[1] Thm 29: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E et E^* respectivement. Alors $F^\perp$ et G° sont des espaces vectoriels et $\dim F^\perp = n-\dim F$ et $\dim G^\circ = n-\dim G$. De plus, $F^{\perp\circ}=F$ et $G^{\circ\perp}=G$.

Cor.30: Soit $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$ une famille de formes linéaires de rang r sur E. Alors $F=\bigcap_{i=1}^{p}\mathrm{Ker}\,\varphi_i$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-r$. Réciproquement, tout sous-espace vectoriel de E peut s'obtenir ainsi. [1]

Rem 31: Ceci permet de décrire $F\subset E$ par r équations linéaires à n variables.

Cor 32: Soient A_1 et A_2 deux sous-espaces de E, et B_1, B_2 deux sous-espaces de E^*. Alors:

$(A_1+A_2)^\perp = A_1^\perp\cap A_2^\perp$ $\quad$ $(A_1\cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$

$(B_1+B_2)^\circ = B_1^\circ\cap B_2^\circ$ $\quad$ $(B_1\cap B_2)^\circ = B_1^\circ+B_2^\circ$.

B] Applications transposées et lien avec les matrices

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $m\in\mathbb{N}^*$.

Prop-déf 33: Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$. On définit ${}^tu\in\mathcal{L}(F^*,E^*)$ par: $\forall\varphi\in F^*$, ${}^tu(\varphi)=\varphi\circ u$. ${}^tu$ est appelé application transposée de u.

Prop34: $\begin{array}{ccc}\mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(F^*,E^*)\\ u & \longmapsto & {}^tu\end{array}$ est linéaire.

Thm 35: Soient G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u\in\mathcal{L}(E,F)$, $v\in\mathcal{L}(F,G)$. Alors:

① ${}^t(v\circ u)={}^tu\circ{}^tv$

② Si u est un isomorphisme, alors ${}^tu$ de même et $({}^tu)^{-1}={}^t(u^{-1})$.

Prop 36: Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors:

① $\mathrm{Ker}({}^tu)=\mathrm{Im}(u)^\perp$

② $\mathrm{Im}({}^tu)=\mathrm{Ker}(u)^\perp$

Cor 37: $\forall u\in\mathcal{L}(E,F)$, $\mathrm{rg}(u)=\mathrm{rg}({}^tu)$

Thm38: Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des bases de E et F respectivement, de bases duales $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}'^*$. Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors: [3]

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'^*,\mathcal{B}^*}({}^t u) = {}^t \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$

[1] Cor 39 : Si $E=F$, alors $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}^*,\mathcal{B}'^*) = {}^t\mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')^{-1}$

Ex 40 : Ceci nous donne un moyen de calculer les bases antéduales. En effet, soit (e_1,e_2,e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et $f_1^* = 2e_1^*+e_2^*+e_3^*$, $f_2^* = -e_1^*+2e_3^*$, $f_3^* = e_1^*+3e_2^*$. Alors $\mathrm{Pass}((e_1^*,e_2^*,e_3^*),(f_1^*,f_2^*,f_3^*)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$.
Il suffit alors d'inverser et de transposer cette matrice pour exprimer (f_1,f_2,f_3) dans (e_1,e_2,e_3).

III) Utilisation de la dualité

A] En calcul différentiel

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \to \mathbb{R}$ différentiable.

[2] Thm 41 : Si f est C^1, $\forall a \in U$, $\exists! u \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $df_a(h) = \langle u | h \rangle$. u est appelé gradient de f en a et on le note $\mathrm{grad}(f)$ ou $\nabla f(a)$.

Prop 42 : Si f est C^1, $\forall a \in U$, $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$

[5] Def 43 : On dit que $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p si $\forall a \in M$, il existe U ouvert contenant a et $g: U \to \mathbb{R}^{n-p}$ une ~~submersion~~ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$.
On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est tangent à $m \in M$ s'il existe $\gamma :]-\varepsilon;\varepsilon[\to M$ différentiable telle que $\gamma(0)=m$ et $\gamma'(0)=v$.
On note $T_m(M)$ les vecteurs tangents à M en m.

Prop 44 : $T_a(M) = \ker dg_a$. DEV 2

Lem 45 : Soient $v, \ell_1, \dots, \ell_k \in (\mathbb{R}^n)^*$. Si $(\ell_1,\dots,\ell_k)$ est libre et si $\bigcap_{i=1}^{k} \ker(\ell_i) \subset \ker v$ alors $v \in \mathrm{Vect}(\ell_1,\dots,\ell_k)$.

Thm 46 : (des extrema liés) Soient $f, g_1, \dots, g_k$ C^1 de U dans $\mathbb{R}$. Soit $M = \{x \in U \mid g_i(x) = 0 \ \forall i\}$. Si $f_{|M}$ admet un extremum local en m et si $(dg_{i,m})_{1\leq i \leq k}$ est libre pour tout $x \in M$, alors $\exists (\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ / $df_m = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i dg_{i,m}$. Les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

App 47 : (Théorème spectral) Tout endomorphisme symétrique sur un espace euclidien est diagonalisable.

Rem 48 : Le lemme 45 permet de voir que $\nabla f(m)$ est orthogonal à $T_m(M)$.

B] Réduction d'endomorphismes

[1] Prop 49 : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u = \chi_{{}^t u}$.

Prop 50 : Soit $F \subset E$. F est u-stable si et seulement si $F^\perp$ est ${}^t u$-stable.

Rem 51 : Ceci trouve son utilité dans certains raisonnements par récurrence. En effet, si x est un vecteur propre de u, $\mathbb{K}x$ est une droite stable, et donc $(\mathbb{K}x)^\perp$ est un hyperplan u-stable.

App 52 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

App 53 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. u et v sont co-trigonalisables si et seulement si $u \circ v = v \circ u$ et u et v sont trigonalisables.

Références :

① Algèbre, Gourdon [1] ++
② Analyse, Gourdon [2]
③ Algèbre et géométrie, Rombaldi [3]
④ Algèbre 1, Francinou [4]
⑤ Introduction aux sous-variétés, LaFontaine [5]