160

Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien.

Cadre: Soit E un espace euclidien, c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un produit scalaire $\langle . | . \rangle$.

I) Endomorphismes adjoints

A] Définitions et propriétés

Lem 1: Soit l une forme linéaire sur E. Alors $\exists ! a \in E$, $\forall x \in E$, $l(x) = \langle x | a \rangle$.

Thm-def 2: Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ appelé adjoint de u tel que $\forall x, y \in E$ $\langle x | u^*(y) \rangle = \langle u(x) | y \rangle$.

Prop 3: Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

Cor 4: $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u^*) = \det(u)$

Prop 5: Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les égalités:
- $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$
- $(u^*)^* = u$
- $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

Prop 6: Si $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

Prop 7: Soit $F < E$. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Rem 8: Ceci peut trouver son utilité dans certaines démonstrations par récurrence, où, comme nous allons le voir, pour la réduction de certains endomorphismes.

B] Terminologies liées à l'adjoint

Def 9: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique si $u^* = u$. En particulier, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique i.e. ${}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices.

Def 10: $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique si $u^* = -u$. De même, ${}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = -\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices.

Prop 11: $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$; $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

Prop 12: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Def 13: $u \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si $u^* \circ u = u \circ u^* = id$. De même on définit $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Def 14: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

Ex 15: Tous les endomorphismes remarquables précédents sont en particulier normaux.
De même, si $\mathcal{B}$ est orthonormée, ${}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\,{}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$
Etudions plus en détail ces exemples d'endomorphismes.

II) Endomorphismes normaux et réduction

Prop 16: $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si et seulement si $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ où $\|.\|$ est la norme associée à $\langle . | . \rangle$.

Prop 17: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal et soit $F < E$. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ de même.

Lem 18: Tout endomorphisme admet une droite ou un plan stable.

Lem 19: Si $n = 2$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si u admet une valeur propre réelle, alors u se diagonalise dans une base orthonormée. Sinon, $\exists a \in \mathbb{R}$, $\exists b \in \mathbb{R}^*$, il existe B base orthonormée de E tels que $M_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Thm 20: (réduction des endomorphismes normaux)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors il existe une base B orthonormée de E telle que $M_B(u)$ soit de la forme [1]

$$\begin{pmatrix} D_p & & 0 \\ & R_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & R_k \end{pmatrix}$$

où $D_p \in M_p(\mathbb{R})$ est diagonale et $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ où $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $b_i \neq 0$ $\forall i \in [\![1;k]\!]$

App 21: Toute matrice antisymétrique se diagonalise sous cette forme, avec $D_p = 0$ et $a_i = 0$ $\forall i \in [\![1;k]\!]$.

III) Endomorphismes symétriques

A] Théorème spectral

Prop 22: Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique et λ, μ deux valeurs propres distinctes associées aux espaces propres E_λ et E_μ. Alors $E_\lambda \perp E_\mu$. [1]

Thm 23: (spectral) Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.

Cor 24: Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $A = {}^tPDP$.

App 25: On peut classifier les formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ à l'aide de ce théorème. [3]

Cor 26: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille finie d'endomorphismes symétriques. Cette famille est codiagonalisable si et seulement si ils commutent 2 à 2. (dans une base orthonormée).

B] Endomorphismes symétriques (définis) positifs

Def 27: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique positif (resp. défini positif) si $\forall x \in E$, $\langle x | u(x) \rangle \geq 0$ (resp. $\forall x \neq 0$, [1] $\langle x | u(x) \rangle > 0$). On note respectivement $S^+(E)$ et $S^{++}(E)$ l'ensemble de tels endomorphismes. On définit de même matriciellement $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Rem 28: Si B est une base orthonormée de E, $u \in S^+(E) \Leftrightarrow M_B(u) \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $u \in S^{++}(E) \Leftrightarrow M_B(u) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ [1]

Thm 29: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
① $u \in S^+(E) \Leftrightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}_+$
② $u \in S^{++}(E) \Leftrightarrow Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

Thm 30: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si ses mineurs principaux sont strictement positifs.

Cor 31: $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$.

C] Quelques normes matricielles

Soit $|||.|||$ la norme subordonnée de $||.||$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

Prop 32: $\forall A \in S_n(\mathbb{R})$, $|||A||| = \rho(A)$ où ρ est le rayon spectral

Thm 33: $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $|||A||| = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ [1]

Prop-déf 34: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $(x,y) \longmapsto \langle x | Ay \rangle$ définit un produit scalaire sur E. Dans ce cas, on note $||.||_A$ la norme associée.

Thm 35: (inégalité de Kantorovitch) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors $\forall x \in E, x \neq 0$, $\dfrac{||x||^4}{||x||_A^2 \, ||x||_{A^{-1}}^2} \geq 4 \dfrac{\lambda_{max} \lambda_{min}}{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}$ [2]

où $\lambda_{max} = \max\limits_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$ et $\lambda_{min} = \min\limits_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$

App 36: Ceci permet de calculer la vitesse de convergence de l'algorithme du gradient à pas optimal.

IV) Endomorphismes orthogonaux

A] Définitions et propriétés

[1]

Thm 37 : Les assertions suivantes sont équivalentes :
- ① u est orthogonal
- ② u est une isométrie : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$
- ③ $\forall x, y \in E, \langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$
- ④ u envoie une base orthonormée sur une base orthonormée.

Cor 38 : $O(E) < GL(E)$.

Prop 39 : $\forall u \in O(E)$, $\det(u) = \pm 1$.

Def 40 : On définit $O^+(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = 1\}$
$O^-(E) = \{u \in O(E) \mid \det u = -1\}$ (de même, $O_n^+(\mathbb{R})$ (ou $SO_n(\mathbb{R})$) et $O_n^-(\mathbb{R})$)

Prop 41 : $O^+(E)$ est un sous-groupe de E appelé groupe spécial orthogonal de E. De plus, $[O(E) : O^+(E)] = 2$
En particulier, $O^+(E) \lhd O(E)$.

Lem 42 : $\forall u \in O(E)$, $Sp(u) \subset \{\pm 1\}$.

Thm 43 : Soit $u \in O(E)$. Alors il existe une base orthonormée B telle que $\mathcal{M}_B(u)$ soit de la forme
$\begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_1(\theta) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_k(\theta) \end{pmatrix}$ où $R_k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

B] Cas de la dimension 2 et 3

[2]

Thm-def 44 : Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$. Alors A est semblable dans une base orthonormée soit à une matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dite de rotation d'angle θ, soit à $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Rem 45 : Cette deuxième matrice est dans une base orthonormée semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, une matrice de symétrie d'axe $\langle e_1 \rangle$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cor 46 : $SO_2(\mathbb{R})$ est abélien.

Prop 47 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit s la symétrie d'axe e_1.
Alors $R(\theta) \circ s$ est une symétrie d'axe $(\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2}))$

Thm-def 48 : Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$. Alors A est semblable dans une base orthonormée à $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$. Si $\varepsilon = 1$, on dit que c'est une rotation d'axe e_1 d'angle θ. [2]

Thm 49 : (DEV 1) Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors $SO_3(\mathbb{R}) \simeq G/\{\pm 1\}$ [5]

C] Conséquences topologiques

Prop 50 : $O(E)$ et $SO(E)$ sont des compacts de $\mathcal{L}(E)$

Thm 51 : (DEV 2) (Décomposition polaire) L'application
$\Phi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
$(\Omega ; S) \longmapsto \Omega S$ [1]

Prop 52 : $O^+(E)$ est connexe par arcs

Cor 53 : Les composantes connexes de $O(E)$ sont $O^+(E)$ et $O^-(E)$.

Références :

- ① Maths pour l'agreg, Rombaldi [1]
- ② Toute l'algèbre de la licence, Escofier [2]
- ③ Algèbre, Gourdon [3]
- ④ Analyse pour l'agreg, Bernis [4]
- ⑤ Cours d'algèbre, Perrin [5]