170

Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Cadre : Soit E un k-espace vectoriel, k un corps commutatif, $\mathrm{car}(k) \neq 2$. On suppose $\dim_k E < \infty$.

I) Formes quadratiques

A] Définitions et formes polaires

[1] **Def 1** : On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to k$, $x \mapsto \varphi(x,x)$ où $\varphi : E \times E \to k$ bilinéaire symétrique.

EX 2 : Les produits scalaires réels sont des formes quadratiques.

Prop 3 : Soient q une forme quadratique sur E et $\varphi : E\times E \to k$ bilinéaire symétrique telle que $\forall x \in E, q(x) = \varphi(x,x)$. Alors $\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$.

Cor-def 4 : φ est alors uniquement déterminée par q. On l'appelle forme polaire de q.

B] Représentation matricielle

Soient q une forme quadratique et φ sa forme polaire.

[1] **Def 5** : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On appelle matrice de φ (ou de q) dans $\mathcal{B}$: $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$. C'est en particulier une matrice symétrique.

Prop 6 : Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Alors : $\varphi(x,y) = {}^t x \, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \, y$

Prop 7 : Soient $\mathcal{B}'$ une autre base et $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^t P \, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) \, P$

[2] **Cor-def 8** : Le déterminant de la matrice de q est toujours le même modulo un carré. On l'appelle discriminant de q.

C] Rang et noyau d'une forme quadratique

Def 9 : φ définit une application linéaire $\overline{\varphi} : E \to E^*$, $x \mapsto \varphi(x, \cdot)$. φ est dite non dégénérée si $\overline{\varphi}$ est injective.

Rem 10 : Si $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{B}^*$ sa base duale associée, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\overline{\varphi}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ [2]

Def 11 : On appelle noyau de q (ou φ) l'espace $\mathrm{Ker}\,\overline{\varphi}$, noté $\mathrm{Ker}\,\varphi$ ou $\mathrm{Ker}\,q$. Le rang de φ (ou q) est le rang de $\overline{\varphi}$.

Rem 12 : Si $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $\mathrm{Ker}\,\overline{\varphi} = \mathrm{Ker}\,A$.

Prop 13 : q est non dégénérée si et seulement si son discriminant est non nul.

Def 14 : q est dite définie si $\forall x \in E, q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Cor 15 : Si q est définie, elle est non dégénérée. [1]

Rem 16 : La réciproque est fausse : $q(x;y) = x^2 - y^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

II) Orthogonalité et isotropie

A] Vecteurs orthogonaux

Def 17 : $x, y \in E$ sont dits orthogonaux selon φ (ou q) si $\varphi(x,y) = 0$.

Prop-def 18 : Soit $A \subset E$. On définit l'orthogonal de A par $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in E, \varphi(x,y) = 0\}$. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$. [1]

Prop 19 : Si $V < E$, $n = \dim_k E$ et que φ est non dégénérée alors $\dim V^\perp = n - \dim V$.

[2] **Cor 20**: Si φ est non dégénérée et que $V \cap V^{\perp} = \{0\}$ alors $E = V \oplus V^{\perp}$.

Cor 21: Si $V < E$ et $W < E$ et que φ est non dégénérée, alors $V^{\perp\perp} = V$, $(V+W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$, $(V \cap W)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp}$.

B] Isotropie

[1] **Def 22**: $x \in E$ est dit isotrope si $q(x) = 0$. On note C_q l'ensemble des vecteurs isotropes, appelé cône isotrope.

Rem 23: q est définie si et seulement si $C_q = \{0\}$.

Prop 24: $\operatorname{Ker} q \subset C_q$

[2] **Def 25**: Soit $V < E$. V est dit isotrope si $V \cap V^{\perp} \neq \{0\}$, autrement dit $q_{|V}$ est dégénérée.

Prop 26: Soit $x \in E$. x est isotrope si et seulement si kx est isotrope.

Def 27: $V < E$ est totalement isotrope si $V \subset V^{\perp}$, autrement dit $q_{|V} = 0$. L'indice $\nu(q)$ de q est le maximum des dimensions de ces espaces.

Ex 28: $\operatorname{Ker} \varphi$ est totalement isotrope.

Prop 29: Si φ est non dégénérée, $\nu(q) \leq \frac{\dim E}{2}$

C] Groupe orthogonal

On suppose q non dégénérée.

[2] **Def 30**: $u \in GL(E)$ est une isométrie si elle préserve q (ou φ).

Prop 31: L'ensemble des isométries forme un sous-groupe de $GL(E)$ appelé groupe orthogonal et noté $O(q)$ ou $O(\varphi)$.

[2] **Prop 32**: Soient $u \in GL(E)$ et $U = \mathcal{M}_B(u)$, $A = \mathcal{M}_B(q)$ où B base de E. Alors $u \in O(q) \Leftrightarrow {}^tUAU = A$

Cor 33: $\forall u \in O(q)$, $\det u = \pm 1$

Prop-def 34: Soit $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det u = 1\}$ le groupe spécial orthogonal. Alors $SO(q) \lhd O(q)$.

Ex 35: Si $E = \mathbb{R}^2$, $k = \mathbb{R}$, $A = I$, $SO(q) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

D] Bases orthogonales

[1] **Def 36**: Une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ est dite orthogonale (pour φ) si $\forall i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$

Thm 37: Si q est non dégénérée, alors il existe une base orthogonale pour q.

App 38: Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$ symétrique. Alors $\exists P \in GL_n(k)$, telle que ${}^tPAP$ est diagonale.

Rem 39: Ceci est une version plus faible du théorème spectral, qui a l'avantage d'être valable sur k quelconque, car $k \neq 2$.

Rem 40: La méthode de Gauss donne un algorithme explicite permettant de donner une telle base, par l'utilisation d'identités remarquables.

Ex 41: Soit $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + xy + yz$

Alors $q(x,y,z) = (x + \frac{1}{2}z)^2 - 2(y - \frac{1}{4}z)^2 - \frac{1}{8}z^2$.

III) Classification des formes quadratiques

On suppose ici q non dégénérée.

[2] **Def 42**: Soit q' une autre forme quadratique. q est équivalente

à q' si $\exists u \in GL(E)$, $q' \circ u = q$.

Rem 43 : Si $A' = \mathcal{M}_B(q')$, $A = \mathcal{M}_B(q)$, q et q' sont équivalentes
[2] si et seulement si $\exists P \in GL(E)$, $A' = {}^tPAP$.

Prop 44 : Si q est équivalente à q', $O(q) \simeq O(q')$.

On donne les classes d'équivalences dans trois cas :

A] k algébriquement clos

Thm 45 : Toutes les formes quadratiques non dégénérées
[2] sont équivalentes.

Cor 46 : $\nu(q) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

B] $k = \mathbb{R}$

Thm 47 : (de Sylvester) Il existe exactement $n+1$ classes de formes quadratiques non dégénérées dont
[2] des représentants sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ où $p \in [\![0 ; n]\!]$.

Def 48 : Si q est équivalente à $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$, le couple $(p, n-p)$ est appelé signature de q.

Thm 49 : (DEV1) Soit $Q(E)$ l'espace des formes quadratiques sur E et soit $\Omega(E) = \{q \in Q(E) \mid q \text{ non dégénérée}\}$.
[5] On munit $Q(E)$ de la norme $N(q) = \sup_{\|x\|=1} |q(x)|$. Alors les composantes connexes de $\Omega(E)$ sont les $\Omega_i(E) = \{q \in \Omega(E) \mid q$ de signature $(i, n-i)\}$.

C] k corps fini

Thm 50 : Il y a exactement deux classes de formes quadratiques non dégénérées dont des représentants sont I_n et
[2] $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \in k^2$.

Cor 51 : Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont même discriminant.

Thm 52 : (DEV2) (loi de réciprocité quadratique) Soient p, q premiers impairs. Alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$

IV) Application en géométrie différentielle

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ C^2.

Def 53 : Soit $a \in U$. On appelle matrice Hessienne de f en a : $\mathrm{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i, j \leq n}$

Thm 54 : (de Schwarz) La matrice Hessienne est symétrique en tout point. Elle définit en particulier [3]
une forme quadratique en tout point.

Thm 55 : (de Taylor-Young) Soit $a \in U$. Alors $\forall h \in U$, $a + h \in U \Rightarrow f(a+h) = f(a) + \mathrm{Jac}_a(f) h + \frac{1}{2} {}^th \, \mathrm{Hess}_a(f) h + o(\|h\|^2)$

Thm 56 : Soit $a \in U$.

- Si a est minimum local, $\mathrm{Hess}_a(f)$ est positive.
- Si $\mathrm{Hess}_a(f)$ est définie positive, a est un minimum local.

Thm 57 : (lemme de Morse) On suppose f C^3 et $df_0 = 0$.
On suppose $\mathrm{Hess}_0(f)$ non dégénérée de signature
$(p, n-p)$. Alors il existe $\varphi : V \to W$ un C^1-difféomorphisme [4]
entre deux voisinages de l'origine tels que, en notant $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$, $\forall x \in U$, $f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x)^2$

Références :

- Algèbre, Gourdon [1] + +
- Cours d'algèbre, Perrin [2] + +
- Analyse, Gourdon [3]
- Petit guide de calcul diff, Rouvière [4]
- Algèbre 3, Francinou [5] (dev)