Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

171

Cadre : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I) Formes quadratiques

A] Définitions et formes polaires

Def 1 : On appelle forme quadratique sur E toute application $q : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x,x)$ où φ est bilinéaire symétrique sur E.

Ex 2 : Si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E, $q : x \mapsto \langle x|x \rangle$ est une forme quadratique.

Prop 3 : Soient q une forme quadratique sur E et φ bilinéaire symétrique telle que $\forall x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$. Alors : $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$.

Cor-def 4 : "φ est" alors uniquement déterminée par q. On l'appelle forme polaire associée à q. [1]

B] Représentation matriciel

On suppose ici E de dimension finie. Soient q une forme quadratique et φ sa forme polaire.

Def 5 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On appelle matrice de φ (ou de q) dans $\mathcal{B}$: $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(q) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \le i,j \le n}$. C'est en particulier une matrice symétrique.

Prop 6 : Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Alors : $\varphi(x,y) = {}^t x M_{\mathcal{B}}(\varphi) y$.

Prop 7 : Soient $\mathcal{B}'$ une autre base et $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Alors $M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^t P M_{\mathcal{B}}(\varphi) P$.

[3] Cor-def 8 : Le déterminant de la matrice de q dans une base est donc toujours le même modulo un carré. Le déterminant est appelé discriminant de q.

Def 9 : φ induit $\bar{\varphi} : E \to E^*$, $x \mapsto \varphi(x, \cdot)$. q (ou φ) est dit non dégénérée si $\bar{\varphi}$ est injective. [3]

Prop 10 : q est non dégénérée si et seulement si son discriminant est non nul.

C] Formes quadratiques positives

Def 11 : q est dit positive si $\forall x \in E$, $q(x) \geq 0$. Elle est définie positive si en plus $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. [1]

Ex 12 : Un produit scalaire définit une forme quadratique définie positive.

Prop 13 : q est (définie) positive si et seulement si sa matrice dans une base est (définie) positive.

Thm 14 : (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Si q est positive, $\forall x, y \in E$, $|\varphi(x,y)|^2 \leq q(x) q(y)$. Si de plus q est définie, on a égalité si et seulement si (x,y) est liée. [1]

Cor 15 : Une forme quadratique positive est définie si et seulement si elle est non dégénérée.

Thm 16 : (de Minkowski) Si q est positive, alors $\forall x, y \in E$, $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$ (q définit alors une semi-norme)

II) Orthogonalité et conséquences

A] Orthogonalité et isotropie

Def 17 : Soient $x, y \in E$. x et y sont dits orthogonaux selon φ (ou q) si $\varphi(x,y) = 0$ [1]

Prop-def 18 : Soit $A \subset E$. On définit l'orthogonal de A selon φ par $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \varphi(x,y) = 0\}$. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$

Prop 19 : Si $V < E$ et que $n = \dim E < \infty$, alors $\dim V^\perp = n - \dim V$ si φ non dégénérée.

[3]

Cor 20 : Si $V < E$ et $V \cap V^\perp = \{0\}$ alors $E = V \oplus V^\perp$. si φ non dégénérée.

Prop 21 : Soient E de dimension finie et $V<E$, $W<E$. Alors : $V^{\perp\perp} = V$, $(V+W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$, $(V\cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$, φ non dég.

Def 22 : Soit $x \in E$, $x \neq 0$. x est dit isotrope si $q(x) = 0$. $A \subset E$ est dit isotrope si $A \cap A^\perp \neq \{0\}$. Il est dit totalement isotrope si $A \subset A^\perp$.

Rem 23 : Si $x \in E$, x est isotrope si et seulement si $\mathbb{R}x$ l'est.

Def 24 : On appelle indice de q le maximum des dimensions des espaces totalement isotropes, noté $\nu(q)$.

Rem 25 : Si $\dim E = n$, $\nu(q) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

B] Classification des formes quadratiques

On suppose $n = \dim E < \infty$.

[1]

Def 26 : Une base $(e_1, \dots, e_n)$ est dite φ-orthogonale si $\forall i \neq j \in [\![1;n]\!]$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Thm 27 : E admet une base φ-orthogonale.

Algo 28 : (Méthode de Gauss) On écrit $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$. Alors :

- Si $\exists i \in [\![1;n]\!]$, $a_{ii} \neq 0$ (par exemple $a = a_{11}$), alors : $\varphi(x_1, \dots, x_n) = a x_1^2 + x_1 B(x_2, \dots, x_n) + C(x_2, \dots, x_n)$ où B est linéaire et C une forme quadratique. Donc :
$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = a\left(x_1 + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{4a}\right)$$ et $C - \frac{B^2}{4a}$ est une forme quadratique.
- Sinon, si φ est nulle c'est fini. Sinon $\exists i \neq j$, $a_{ij} \neq 0$, par exemple $a = a_{12}$. Alors :
$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = a x_1 x_2 + x_1 B(x_3, \dots, x_n) + x_2 C(x_3, \dots, x_n) + D(x_3, \dots, x_n)$$ où B et C sont linéaires et D forme quadratique.
Alors $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{a}{4}\left(\left(x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a}\right)^2\right) + D - \frac{BC}{a}$

Ceci permet de trouver une base orthogonale pour φ.

[3]

Def 29 : Soit q' une autre forme quadratique. q est équivalente à q' si $\exists u \in GL(E)$, $\forall x \in E$, $q(x) = q'(u(x))$.

Thm 30 : (Loi d'inertie de Sylvester) Si $n = \dim E < \infty$, il existe exactement $n+1$ classes d'équivalences de formes quadratiques non dégénérées, données par les matrices
$$= \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$$ $(p, n-p)$ est la signature de q.

[4]

Thm 31 : Soient $n = \dim E < \infty$, $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E et $\Omega(E) \subset Q(E)$ les formes quadratiques non dégénérées. Soient : $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $\Omega_k(E) = \{q \in \Omega(E) \mid \mathrm{sign}(q) = (k, n-k)\}$. Les composantes connexes de $\Omega(E)$ sont les $\Omega_k(E)$. DEV 1

C] Groupe orthogonal

On suppose q non dégénérée.

[3]

Def 32 : $u \in GL(E)$ est une isométrie si $q(u(x)) = q(x)$ $\forall x \in E$.

Rem 33 : Ceci est équivalent à $\varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$ $\forall x, y \in E$.

Prop 34 : L'ensemble des isométries est un groupe appelé groupe orthogonal, noté $O(q)$ ou $O(\varphi)$.

On suppose $\dim E < \infty$. Soit $A = \mathcal{M}_B(q)$ dans une base.

Prop 35 : Soient $u \in GL(E)$ et $U = \mathcal{M}_B(U)$. $u \in O(q)$ si et seulement si ${}^tUAU = A$

Cor 36 : Si q est non dégénérée et $u \in O(q)$, $\det(u) = \pm 1$.

Prop-def 37 : Soit $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det u = 1\}$ le groupe spécial orthogonal. Alors $SO(q) \triangleleft O(q)$

Ex 38 : Si $E = \mathbb{R}^2$ et $I = I_2$, $SO(q) = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}$.

III) Utilisation des formes quadratiques...

A] Dans l'étude des coniques

[6] **Def 39 :** $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ est une conique si c'est l'ensemble des solutions de $q(x) + \varphi(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$, q est une forme quadratique non nulle de $\mathbb{R}^2$ et φ une forme linéaire.

Ex 40 : Les équations $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 - y^2 = 1$ définissent des coniques.

Quitte à multiplier par -1, on peut considérer q de signature $(2,0)$, $(1,1)$ ou $(1,0)$.

Thm 41 : Si q est non dégénérée et $\mathcal{C} \neq \emptyset$ non réduit à un point alors :

- Si $\mathrm{sign}(q) = (2,0)$, $\exists A, B > 0$ / $\mathcal{C}$ est décrit par $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ dans une base affine adaptée. $\mathcal{C}$ est appelé ellipse.
- Si $\mathrm{sign}(q) = (1,1)$, $\mathcal{C}$ est soit réunion de deux droites non parallèles, soit $\exists A, B$ / $\mathcal{C}$ est décrit par $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ dans une base affine. $\mathcal{C}$ est appelé hyperbole.

Thm 42 : Si q est dégénérée, $\mathcal{C} \neq \emptyset$ et non réduit à un point, $\mathcal{C}$ est une droite, deux droites parallèles ou $\exists a > 0$, $\mathcal{C}$ est décrit par $y = a x^2$ dans une base affine. $\mathcal{C}$ est appelée parabole.

Voir figures en annexe.

B] En géométrie différentielle

[2] Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$.

Def 43 : Soit $a \in U$. On appelle matrice hessienne de f en a : $\mathrm{Hess}_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Thm 42 : La Hessienne de f est symétrique en tout point. En particulier, $x \mapsto d^2f_a(x,x)$ est une forme quadratique pour tout $a \in U$.

[2] **Thm 43 :** (Taylor-Young) Soient $a \in U$. Alors :
$f(a+h) = f(a) + \mathrm{Jac}_a(f) \cdot h + {}^t h \,\mathrm{Hess}_a(f) h + o(\|h\|^2)$

Thm 44 : Soit $a \in U$

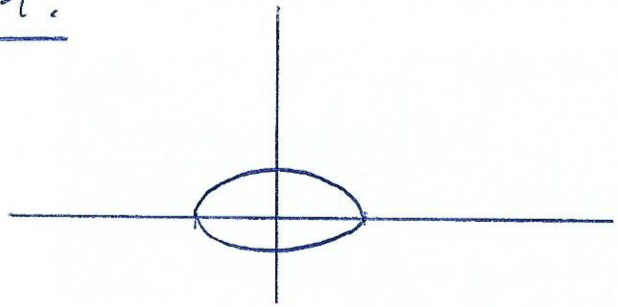
- Si a est un minimum local, $\mathrm{Hess}_a(f)$ est positive.
- Si $\mathrm{Hess}_a(f)$ est définie positive, a est un minimum local.

[3] **Thm 45 :** (Lemme de Morse) On suppose f $\mathcal{C}^3$, que $df_0 = 0$ et que $\mathrm{Hess}_0(f)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe $\varphi : V \to W$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine tel que :
$\forall x \in U$, $f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x)^2$
où $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$ DEV 2

Références :

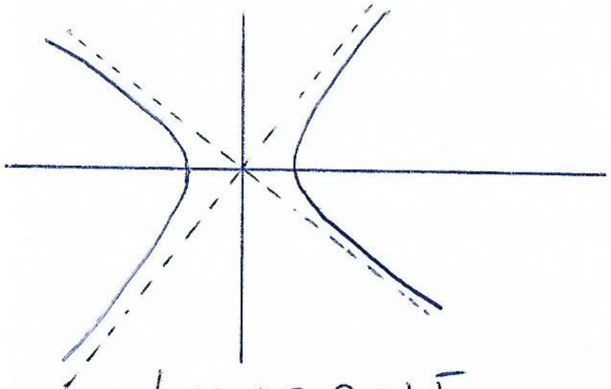
- Algèbre, Gourdon [1] ++
- Analyse, Gourdon [2]
- Cours d'algèbre, Perrin [3] ++
- Algèbre 3, Grosejean [4] (dev)
- Petit guide de calcul diff, Rouvière [5] (dev)
- Algèbre linéaire, Grifone [6] +

gure 1 :



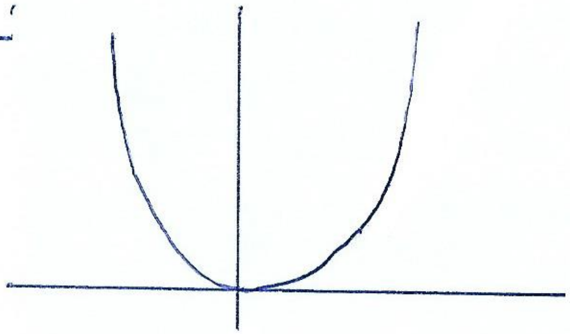
ELLIPSE

Figure 2 :



HYPERBOLE

Figure 3 :



PARABOLE