191

Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

I) Théorie des groupes et algèbre linéaire en géométrie affine

A] Etude du groupe affine

[1]

Soit E un espace affine de direction $\vec{E}$, de dimension n.

Def 1: On appelle groupe affine le groupe $GA(E)$ composé des applications affines bijectives.

Ex 2: Les translations $t_{\vec{u}} : A \mapsto A+\vec{u}$, $\vec{u} \in \vec{E}$ et les homothéties de centre $\Omega \in E$ de rapport $k \neq 0$: $h_{\Omega,k} : A \mapsto \Omega + k\vec{\Omega A}$ sont des éléments de $GA(E)$.

Def 3: On définit le groupe des dilatations $D(E)$ comme l'ensemble des applications affines de partie linéaire une homothétie linéaire.

Rem 4: Une dilatation multiplie les distances par une valeur $k \neq 0$.

Prop 5: $D(E)$ est formé par les translations et les homothéties.

Prop 6: Soit $\vec{u} \in \mathcal{L}(\vec{E})$. $\vec{u}$ stabilise toutes les droites de $\vec{E}$ si et seulement si c'est une homothétie.

Cor 7: Soit $u \in GA(E)$. $u \in D(E)$ si et seulement si pour toute droite $D \subset E$, $u(D) // D$.

Cor 8: Le centre de $GA(E)$ est $\{id_E\}$.

On cherche des générateurs de $GA(E)$. Soient F et G deux sous-espaces affines de direction $\vec{F}$ et $\vec{G}$ supplémentaires dans $\vec{E}$.

Def 9: On définit l'affinité de base F, de direction $\vec{G}$ de rapport $k \neq 0$ comme $f : M \mapsto p(M) + k\,\vec{p(M)M}$ où p est la projection sur F parallèlement à G.

Def 10: Une transvection affine d'hyperplan H est une application affine $t : M \mapsto M + g(M)\vec{u}$ où $\vec{u} \in \vec{H}$ et g est une forme affine définissant H.

Ces éléments sont des bijections affines.

Prop 11: Soient $O \in E$ et $GA_O(E) = \{f \in GA(E) \mid f(O) = O\}$. Alors $GA_O(E) \simeq GL(\vec{E})$.

Cette proposition permet de ramener l'étude de $GA(E)$ à celle de $GL(\vec{E})$.

Def 12: Soit $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit les matrices de transvection par $T_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$, $\lambda \neq 0$, $i \neq j$, et de dilatation $D(\lambda) = diag(1, \dots, 1, \lambda)$, $\lambda \neq 0, 1$.

Meth 13: La méthode de Gauss permet de transformer $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en une matrice échelonnée en multipliant par des matrices de transvection. On a ainsi :

Th 14: $GL_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de transvections et de dilatations.

App 15: $GA(E)$ est engendré par les affinités (de base un hyperplan) et les transvections.

[1]

B] Groupe d'isométries

Def 16: Une application affine f est une isométrie si elle préserve les distances. On note $Is(E)$ le groupe des isométries affines.

Th 17: f est affine si et seulement si sa partie linéaire $\vec{f}$ est orthogonale.

Rem 18: Ainsi, si $O \in E$ et $Is_O(E) = \{f \in Is(E) \mid f(O) = O\}$, $Is_O(E) \simeq O(E)$.

Th 19: Si $f \in Is(E)$, f s'écrit de façon unique comme $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$ et $g \in Is(E)$ admet un point fixe.

App 20: Connaissant ainsi les éléments de $O(E)$ dans une base orthonormée, on peut classifier les éléments de $Is(E)$ selon les points fixes (Fig 1).

C] Groupes diédraux

[1]

Def 21 : On appelle polygône régulier à $n \geq 3$ côtés P_n l'enveloppe convexe des points $A_k = \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right); \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right)$ $0 \leq k \leq n-1$. On appelle groupe diédral d'indice n : $Is(P_n) = \{ f \in Is(\mathbb{R}^2) \mid f(P_n) \subset P_n \}$.

Prop 22 : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est affine, $f \in Is(P_n)$ si et seulement si $f \in Is(\mathbb{R}^2)$ préserve les sommets.

Ex 23 : La rotation linéaire r d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et la réflexion s d'axe (OA_0) sont des éléments de $Is(P_n)$.

Thm 24 : $Is(P_n)$ est engendré par r et s qui vérifient $rs = sr^{-1}$. En particulier, $|Is(P_n)| = 2n$.

App 25 : $Is(P_n) \trianglelefteq S_3$.

II) Utilisation des formes quadratiques

A] Etude des coniques

[2]

Def 26 : On appelle conique tout ensemble de points $(x;y)$ satisfaisant une équation de la forme $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + ax + by = c$ où $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$

Def 27 : Une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est une application de la forme : $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x;x)$ où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est bilinéaire symétrique.

Rem 28 : On peut ainsi réécrire l'équation générale d'une conique comme $q(M) + \varphi(M) = k$ où $M = (x;y)$, $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forme quadratique et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Thm 29 : Il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Rem 30 : Cette base peut s'obtenir en utilisant la méthode de Gauss.

[2]

Thm 31 : (de Sylvester) q est équivalente à une et une seule des formes quadratiques données par $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{p'} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. La signature de q est (p, p').

App 32 : Dans une base orthonormée, l'équation de Def 26 devient $aX'^2 + bY'^2 - 2rX' - 2sY' = k$:

- Si q est non dégénérée, dans une base, $aX^2 + bY^2 = h$. Si $sign(q) = (2,0)$ et $h > 0$, c'est une ellipse, si $sign(q) = (1,1)$, et $h > 0$, c'est une hyperbole.
- Si q est dégénérée, par exemple $b = 0$, on a dans une base $aX^2 - bY' = h$, $a \neq 0$. Si $b \neq 0$, on a une parabole.

Rem 33 : On peut reprendre le même principe pour la classification des quadriques.

B] Etude locale de surfaces

On considère une surface d'équation $z = f(x,y)$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est C^2. Soit $a \in \mathbb{R}^2$.

[3]

Thm 34 : (de Schwarz) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=1,2}$ est symétrique. $d^2f(a)$ définit ainsi une forme quadratique, et on a :

App 35 : Soit $a \in \mathbb{R}^2$. Si $sign(d^2f(a)) = (0,2)$, localement, la surface est strictement en dessous du plan tangent sauf en $(a; f(a))$. On a la situation inverse si $sign(d^2f(a)) = (2,0)$. Si $sign(d^2f(a)) = (1,1)$, on a une direction en dessous, et une autre au-dessus localement.

App 36 : Si a est point critique, et $sign\, d^2f(a) = (0,2)$, a est un maximum local strict de f. Si $sign\, d^2f(a) = (2,0)$ c'est un minimum local strict de f. Si $sign\, d^2f(a) = (1,1)$ ce n'est pas un extremum local.

Rem 37 : Ces informations sont utiles pour étudier le comportement local d'une surface.

III) Utilisation des corps

A] Nombres complexes et quaternions

Thm-def 38 : $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ est un corps. Ses éléments sont les nombres complexes. On pose $i = \overline{X}$ vérifiant $i^2 = -1$.

Rem 39 : $\mathbb{C}$ peut être défini en posant comme produit sur $\mathbb{R}^2$: $(a;b)(c;d) = (ac-bd\,;\,ad+bc)$. En particulier, $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

Prop-def 40 : Soit $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Alors $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme de groupes surjectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.

Cor 41 : $SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U}$.

[4] **Rem 42 :** Ceci permet de représenter plus facilement les rotations linéaires (ou affines) sur $\mathbb{R}^2$: tourner $(x;y)$ d'un angle θ autour de O revient à multiplier $(x+iy)$ par $e^{i\theta}$.

On aimerait trouver un équivalent pour $SO_3(\mathbb{R})$.

Thm-def 43 : Il existe un corps $\mathbb{H}$ qui soit une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4 de base $1, i, j, k$ avec : $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. C'est le corps des quaternions. Si $q = a+ib+jc+kd$, soit $\overline{q} = a-ib-jc-kd$.

Prop 44 : Le centre de $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}$. De plus, $N : \mathbb{H}^* \to \mathbb{R}^*$, $q \mapsto q\overline{q}$ est un morphisme de groupe. On note G son noyau.

$\boxed{\text{Thm 45 : (DEV1) } SO_3(\mathbb{R}) \simeq G/\{\pm 1\}}$.

App 46 : $SO_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.

B] Construction à la règle et au compas

[5] **Def 47 :** $M \in \mathbb{R}^2$ est constructible à partir de $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ si on a l'un des scénarios suivants :
- M est à l'intersection de droites passant par 2 points de $\mathcal{B}$ (droites constructibles)
- M est à l'intersection de deux cercles de centres un point de $\mathcal{B}$ et de rayon la distance de deux points de $\mathcal{B}$ (cercles constructibles)
- M est à l'intersection d'une droite et un cercle constructible.

Soient $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$.
M est constructible s'il existe $M_1, \dots, M_r = M \in \mathbb{R}^2$ avec $\forall i$, M_i constructible à partir de $\{O; I; M_1; \dots; M_{i-1}\}$.

Thm 48 : (de Wantzel) $M \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est constructible si et seulement s'il existe $\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \dots \subset \mathbb{K}_r$ des sous-corps de $\mathbb{C}$ avec $\forall i$, $[\mathbb{K}_i : \mathbb{K}_{i-1}] = 2$ et $z \in \mathbb{K}_r$.

Cor 49 : Si $z \in \mathbb{C}$ est constructible, il est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré une puissance de 2.

App 50 : La quadrature du cercle et la duplication du cube ne sont pas possibles. [5]

Def 51 : P_n est constructible si $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ l'est.

Lem 52 : Si $m, n \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, P_{mn} est constructible si et seulement si P_m et P_n le sont.

Lem 53 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_{2^n} est constructible.

Thm 54 : (DEV2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier impair. Soit $\alpha \geq 1$. P_{p^α} est constructible si et seulement si $\alpha = 1$ et $\exists n \in \mathbb{N}$, $p = 1 + 2^n$.

App 55 : (Théorème de Gauss-Wantzel) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. P_n est constructible si et seulement si n est de la forme dans sa décomposition en produit de facteurs premiers : $n = 2^\alpha p_1 \dots p_r$ avec $p_i = 1 + 2^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{N}$.

Fig 1 :

- $n = 2$:

pts fixes	Nature
Plan	identité
Droite	réflexion
Point	Rotation distincte de id
ϕ	translation, ou réflexion glissée.

- $n = 3$:

pts fixes	Nature
Espace	identité
Plan	Réflexion
Droite	Rotation distincte de l'identité
Point	Symétrie-rotation
ϕ	translation, réflexion glissée ou vissage

Références :

① Cours de géométrie, Mercier [1]
② Algèbre linéaire, Grifone [2]
③ Petit guide de calcul diff., Rouvière [3]
④ Cours d'algèbre, Perrin [4]
⑤ Théorie des corps, Carrega [5]