Espaces de fonctions. Exemples et applications.

201

I) Fonctions continues sur un compact

A] Modes de convergence d'une suite de fonctions

Soient X un espace topologique et E espace vectoriel normé.

[1]

Def 1 : Soient (f_n) suite de fonctions de X dans E et $f : X \to E$.
- (f_n) converge simplement vers f si : $\forall x \in X, \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$
- (f_n) converge uniformément vers f si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Prop 2 : La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Rem 3 : La réciproque est fausse. En revanche :

Lem 4 : (de Dini) Soient $E = \mathbb{R}$ et (f_n) une suite de X dans $\mathbb{R}$ croissante. On suppose X compact. Si (f_n) converge simplement vers $f : X \to \mathbb{R}$ continue alors (f_n) converge uniformément vers f.

On suppose à présent X compact.

Prop 5 : Toute fonction continue de X dans E est bornée.

Prop 6 : Si E est un espace de Banach, alors $(C^0(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. En particulier, cet espace est fermé dans l'ensemble des fonctions bornées sur X.

Thm 7 : (de Heine) Toute fonction continue de X dans E est uniformément continue.

App 8 : Si $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$, toute fonction de $C^0([a,b], \mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.

B] Des résultats de densité

On suppose par la suite que X contient au moins deux éléments.

Def 9 : Soit $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$. H est dite :
- réticulée si $\forall f, g \in H$, $\sup(f,g) \in H$ et $\inf(f,g) \in H$.
- séparante si $\forall x \neq y \in X, \exists h \in H, h(x) \neq h(y)$.

Lem 10 : Si H est réticulée et telle que $\forall y \neq x \in X$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \exists h \in H, h(x) = \alpha_1, h(y) = \alpha_2$ alors H est dense dans $(C^0(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Lem 11 : Si H est un sous-espace vectoriel réticulé séparant et contenant les constantes, alors H est dense dans $(C^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Thm 12 : (de Stone-Weierstrass) Toute sous-algèbre de $(C^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ séparante et unitaire est dense. DEV 1 [2]

Cor 13 : (Théorème de Weierstrass) L'espace des fonctions polynomiales réelles est dense dans $(C^0([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Thm 14 : (Stone-Weierstrass cas complexe) Toute sous-algèbre de $(C^0(X,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ séparante, unitaire et stable par conjugaison est dense.

Thm 15 : (Weierstrass trigonométrique) Toute fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

C] Compacité dans $C^0(X, \mathbb{C})$

Def 16 : Soient X un espace métrique et $A \subset X$. A est relativement compact s'il est inclus dans un compact. [3]

Def 17 : Soit $A \subset C^0(X, \mathbb{C})$. A est dit équicontinue sur X si : $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in X, d(x,y) < \delta \Rightarrow \forall f \in A, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. On définit de façon similaire l'équicontinuité uniforme.

[3] **Thm 18 :** (de Heine équicontinue) $A \subset C^0(X, \mathbb{C})$ est équicontinue si et seulement si A est uniformément équicontinue.

$\boxed{\text{Thm 19 : (d'Ascoli) Soit } A \subset C^0(X,\mathbb{C}). \ A \text{ est relativement compact si et seulement si } A \text{ est bornée équicontinue.}}$ DEV 2

Cor 20 : Les compacts de $C^0(X,\mathbb{C})$ sont les fermés bornés équicontinues.

II) Espaces L^p

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A] Structure d'espace vectoriel normé

Def 21 : Soit $p \geq 1$. On définit :

$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$

$\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ est bornée } \mu\text{-presque partout}\}$

[5] **Ex 22 :** Dans le cas où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, on a $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \ell^p(\mathbb{N}) = \{(u_n) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p < \infty\}$

Prop 23 : Les espaces $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^\infty$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Prop 24 : Si $\mu(X) < \infty$, alors $\forall q \geq p \geq 1$, $\mathcal{L}^q_{\mathbb{K}} \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}$

Def 25 : Soit $p \geq 1$. On définit :

① $\forall f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

② $\forall f \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$, $\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 \mid \mu(|f| > M) = 0\}$.

Thm 26 : (inégalité de Hölder) Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$). Alors $\forall f \in \mathcal{L}^p, \forall g \in \mathcal{L}^q$, on a $fg \in \mathcal{L}^1$ et : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. On a de plus égalité si et seulement si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\alpha |f|^p = \beta |g|^q$ μ-presque partout.

Thm 27 : (inégalité de Minkowski) $\forall p \in [1; +\infty]$, $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

[5] **Prop-def 28 :** Pour $p \in [1; +\infty]$, on définit $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ comme étant le quotient $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ par l'égalité μ-presque partout. Alors $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Thm 29 : (de Riesz-Fischer) Cet espace est plus précisément un espace de Banach.

B] Quelques résultats de densité

Prop 30 : L'espace des fonctions étagées mesurables est dense dans $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$ pour $p \in [1; +\infty]$.

Prop 31 : L'espace des fonctions continues à support compact est dense dans $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$, $p \in [1; +\infty[$

Rem 32 : Ce résultat ne tient plus en général pour $p = \infty$.

App 33 : $\forall p \in [1; +\infty[$, $\tau_h : \begin{array}{l} L^p \to L^p \\ f \mapsto f(\cdot + h) \end{array}$ est continue

App 34 : (Riemann-Lebesgue) $\forall f \in L^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$ où λ mesure de Lebesgue, $\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\xi t} dt \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0$

III) Fonctions holomorphes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

A] Théorie de Cauchy

[4] **Def 35 :** Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. f est dite dérivable en z_0 si la quantité $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ existe et est finie. On la note $f'(z_0)$. f est dite holomorphe

[4]

sur Ω si elle est dérivable en chaque point de Ω. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble de telles fonctions.

Ex 36 : Les séries entières, et les fonctions analytiques sur Ω (fonctions localement développable en séries entières) sont des fonctions holomorphes.

Prop 37 : Soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $f + \lambda g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $fg \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(f+\lambda g)' = f' + \lambda g'$, $(fg)' = f'g + fg'$.

Prop 38 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Si f admet une primitive sur Ω, alors pour tout lacet dans Ω, $\int_\gamma f = 0$

Thm 39 : (de Cauchy-Goursat) Soit f continue sur Ω et holomorphe (sauf éventuellement en un point). Alors pour tout triangle Δ de Ω, $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

Thm 40 : (de Cauchy) Si Ω est convexe et f continue sur Ω, holomorphe (sauf éventuellement en un point) alors pour tout lacet γ : $\int_\gamma f = 0$

Thm 41 : (formule de Cauchy) Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω convexe. Soient γ un lacet dans Ω et $z \in \Omega \setminus \gamma^*$. On a alors :

$$f(z)\, \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Cor 42 : $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si et seulement si f est analytique sur Ω.

Thm 43 : (de Morera) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si et seulement si f est continue sur Ω et pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$, $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

B] Conséquences

Thm 44 : (principe de prolongement analytique) Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω coïncidant sur une partie admettant un point d'accumulation. Si Ω est connexe, alors $f = g$.

Thm 45 : Soient $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ (a est appelé singularité isolée de f). Si f est bornée au voisinage de a, alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On dit que a est une singularité artificielle de f.

Thm 46 : Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ décomposée en série entière autour de $a \in \Omega$: $\forall z \in D(a,R)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$. Alors :

$$\forall r \in]0,R[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) e^{-int}\, dt$$

En particulier $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt$ (formule de la moyenne).

Thm 47 : (de Liouville) Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante.

App 48 : Théorème de d'Alembert-Gauss.

App 49 : (principe du maximum) Soient $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $a \in \Omega$, $r > 0$ tels que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Alors :

$$\forall z \in D(a,r),\ |f(z)| \leq \max_{\theta \in [0,2\pi]} |f(a + re^{i\theta})|$$ et on a égalité si et seulement si f est constante sur la composante connexe contenant a.

Références :

- Analyse, Gourdon [1]
- Éléments d'analyse fonctionnelle (Hirsch et Lacombe) [2]
- Analyse, Bernis [3]
- Analyse réelle et complexe (Rudin) [4]
- Théorie de l'intégration (Briane, Pagès) [5]