203

Utilisation de la notion de compacité.

I) Espaces compacts : définitions, propriétés

A] Propriété de Borel-Lebesgue [3], [4]

Def 1 : Soit X un espace topologique. On appelle recouvrement d'ouvert toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X tels que $X=\bigcup_{i\in I} O_i$. Un sous-recouvrement de $(O_i)_{i\in I}$ est une sous-famille qui est un recouvrement de X.

Def 2 : X est dit compact s'il est séparé et que tout recouvrement de X admet un sous-recouvrement fini.

Ex 3 : Toute partie fini d'un espace topologique séparé, muni de la topologie induite, est compacte.

[4] Par la suite, X désignera un espace topologique séparé.

Prop 4 : X est compact si et seulement si pour toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{i\in I} F_i=\emptyset$, il existe $J\subset I$ fini tel que $\bigcap_{j\in J}F_j=\emptyset$

Cor 5 : Si X est compact et que $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés satisfaisant la propriété d'intersection non vide : $\forall J\subset I$ fini, $\bigcap_{j\in J}F_j\neq\emptyset$ alors $\bigcap_{i\in I}F_i\neq\emptyset$

Def 6 : $A\subset X$ est dit compact dans X si il est compact pour la topologie induite par X.

Prop 7 : $A\subset X$ est compact dans X si et seulement si pour toute famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ telle que $A\subset\bigcup_{i\in I}O_i$, il existe $J\subset I$ fini tel que $A\subset\bigcup_{j\in J}O_j$.

[3] Thm 8 : Soit $A\subset X$.

① Si A est compact dans X, alors A est fermé.

② Réciproquement, si X est compact et A fermé alors A est compact.

Prop 9 : Toute intersection quelconque de compacts de X est compact. Toute union finie de compacts est compact.

B] Propriété de Bolzano-Weierstrass [3], [4]

On suppose ici que X est métrisable. Soit $A\subset X$.

Prop 10 : Si A est compact, alors A est borné.

Thm 11 : A est compact si et seulement si toute suite de A admet une valeur d'adhérence dans A (Théorème de Bolzano-Weierstrass).

Cor 12 : Tout espace métrique compact est complet.

Cor 13 : Les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont compacts.

Prop 14 : Toute suite d'un compact est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Def 15 : X est dit séparable s'il existe une partie au plus dénombrable dense.

Prop 16 : Si X est compact, alors X est séparable.

Lem 17 : (de Lebesgue) Si X est compact, soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Alors il existe $r>0$ appelé nombre de Lebesgue associé à $(O_i)_{i\in I}$ tel que : $\forall x\in X, \exists i_0\in I, B(x,r)\subset O_{i_0}$.

II) Fonctions continues sur un compact

On suppose ici que X est compact.

A] Généralités

Prop 18 : L'image d'un compact par une application continue est compact.

[4]

Cor 19 : (Thm d'homéomorphisme) Soient Y un espace topologique et $f : X \to Y$ continue bijective. Alors f est un homéomorphisme.

Cor 20 : Toute fonction f continue de X dans (Y espace métrique) est bornée.

Prop 21 : Si Y est un espace de Banach, alors $(\mathcal{C}^0(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$ est aussi un espace de Banach.

[3]

Thm 22 : (de Heine) Toute fonction continue de X dans un espace métrique est uniformément continue.

App 23 : Si $[a,b] \subset \mathbb{R}$, toute fonction de $C^0([a,b],\mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.

[2]

Lem 24 : (de Dini) Soit (f_n) une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers $f : X \to \mathbb{R}$ continue. On suppose (f_n) croissante. Alors (f_n) converge uniformément vers f.

B] Théorème des bornes atteintes

[2]

Thm 25 : Toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

App 26 : (Théorème de Rolle) Soient $[a;b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et dérivable sur $]a;b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a;b[, f'(c) = 0$.

Cor 27 : (Théorème des accroissements finis) Soient $[a;b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a;b[$, $a \neq b$. Alors $\exists c \in]a;b[, f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Cor 28 : Dans ce cas, si f' est bornée, f est lipschitzienne.

C] Des résultats de densité [2]

[2]

On suppose par la suite que X contient au moins 2 éléments.

Def 29 : Soit $H \subset \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$. H est dite :
- réticulée si $\forall f,g \in H$, $\sup(f,g) \in H$ et $\inf(f,g) \in H$
- séparante si $\forall x \neq y \in X, \exists h \in H, h(x) \neq h(y)$.

PEV1

Lem 30 : Si H est réticulée et telle que $\forall y \neq x$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \exists h \in H, h(x) = \alpha_1, h(y) = \alpha_2$, alors H est dense dans $(\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Lem 31 : Si H est un sous-espace vectoriel réticulé, séparante et contenant les constantes alors H est dense dans $(\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

Thm 32 : (de Stone-Weierstrass) Toute sous-algèbre de $(\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ séparante et unitaire est dense.

Cor 33 : (Théorème de Weierstrass) L'espace des fonctions polynomiales réelles est dense dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Thm 34 : (Stone-Weierstrass cas complexe) Toute sous-algèbre de $(\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ séparante, unitaire et stable par conjugaison est dense.

Thm 35 : (Weierstrass trigonométrique) Toute fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

III) Caractérisation des espaces compacts

A] Cas de la dimension finie [1]

[1]

Thm 36 : En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Cor 37 : Les compacts d'un espace vectoriel de dimension finie sont exactement les fermés bornés.

[1]

App 38 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $O_n(\mathbb{K})$ est compact dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Thm 39 : (de compacité de Riesz) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée pour $\|\cdot\|$ est compact.

B] Un exemple en dimension quelconque

Soit (K, d) un espace métrique compact. On se place dans $(\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

[3]

Def 40 : Soient X un espace métrique et $A \subset X$. A est relativement compact s'il est inclus dans un compact.

Prop 41 : $A \subset X$ est relativement compact si et seulement si toute suite de A admet une valeur d'adhérence dans X.

[5]

Def 42 : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$. $\mathcal{A}$ est dite équicontinue en $x_0 \in K$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in K, d(x, y) < \delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{A}, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. $\mathcal{A}$ est dite équicontinue si elle est équicontinue en tout point de K. On définit similairement l'uniforme équicontinuité.

Thm 43 : (de Heine équicontinue) $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$ est équicontinue si et seulement si $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinue.

Thm 44 : (d'Ascoli) Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$. $\mathcal{A}$ est relativement compact si et seulement si $\mathcal{A}$ est bornée et équicontinue. DEV 2

Cor 45 : Les compacts de $(\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ sont exactement les fermés bornés équicontinues.

Références :

- Analyse (Gourdon) [1]
- Eléments d'analyse fonctionnelle (Hirsch et Lacombe) [2]
- Topologie générale et espaces normés (El Hage Hassan) [3]
- Topologie (Queffélec) [4]
- Analyse pour l'agrégation (Bernis) [5]