204

Connexité. Exemples et applications.

Cadre : (E,d) désigne un espace métrique.

I] Espaces connexes

A] Définitions et propriétés

[1] Thm 1 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides
- De même avec des fermés
- Les seules parties ouvertes et fermées sont E et ϕ

Def 2 : On dit dans ce cas que E est connexe.

Rem 3 : La notion de connexité est topologique.

Ex 4 : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont connexes.

Prop 5 : Soit $A \subset E$ muni de la distance induite. A est connexe si et seulement si pour tout ouverts U_1 et U_2 tels que $A \cap U_1 \cap U_2 = \phi$ alors ($A \subset U_1$ et $A \cap U_2 = \phi$) ou ($A \subset U_2$ et $A \cap U_1 = \phi$). On a de même avec des fermés.

Ex 6 : $\mathbb{Q}$ n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$.

[2] Lem 7 : (de passage des douanes) Soient $A \subset E$, et C un connexe de E. Si $C \cap \mathring{A} \neq \phi$ et $C \cap (E \setminus \bar{A}) \neq \phi$ alors $C \cap \partial A \neq \phi$

Prop 8 : L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Thm 9 : E est connexe si et seulement si toute application continue de E dans $\mathbb{Z}$ est constante.

Rem 10 : On peut remplacer $\mathbb{Z}$ par n'importe quel espace discret.

B] Stabilité de la notion de connexité

[2] Thm 11 : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de connexes de E telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \phi$. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

[2] Thm 12 : Soient $A_1, \dots, A_n$ des connexes de E tels que $\forall i \in [\![1; n-1]\!]$, $A_i \cap A_{i+1} \neq \phi$. Alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est connexe.

[1] Thm 13 : Soient $(E_1,d_1), \dots, (E_n,d_n)$ des espaces métriques. $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est connexe si et seulement si $\forall i \in [\![1; n]\!]$, E_i est connexe.

Ex 14 : Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est connexe où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[2] Thm 15 : Soient $A \subset E$ connexe et $B \subset E$ tel que $A \subset B \subset \bar{A}$. Alors B est connexe.

Cor 16 : A connexe $\Rightarrow \bar{A}$ connexe.

C] Composantes connexes

[1] Prop-def 17 : La relation : "$\forall x, y \in E$, $x R y \iff \exists C$ connexe de E tel que $x \in C$ et $y \in C$", est une relation d'équivalence. Ses classes sont appelées composantes connexes de E.

Ex 18 : $\mathbb{R}^*$ a deux composantes connexes : $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

[2] Prop 19 : Soient $x \in E$ et $C(x)$ sa composante connexe. Alors $C(x) = \bigcup_{\substack{K \text{ connexe} \\ x \in K}} K$. En particulier, $C(x)$ est le plus grand connexe contenant x.

Prop 20 : Les composantes connexes sont fermées.

Prop 21 : Soit (ω_i) une famille d'ouverts connexes vérifiant $E = \bigsqcup_{i \in I} \omega_i$. Alors les ω_i sont les composantes connexes de E.

[5] **App 22 :** On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\Omega(E)$ l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées sur E. Ses composantes connexes sont les $\Omega_i = \{q \in \Omega(E) \mid \mathrm{sign}(q) = (i, n-i)\}$. DEV 1

[2] **Thm 23 :** Soit $h : E \to E'$ un homéomorphisme. Alors h échange les composantes connexes de E et E'.

App 24 : $\mathbb{S}^1$ n'est pas homéomorphe à $[0,1]$.

D] Connexité par arcs

[2] **Def 25 :** E est dit connexe par arcs si $\forall x, y \in E$, il existe $\gamma : [0,1] \to E$ continue tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Prop 26 : E connexe par arcs $\Rightarrow$ E connexe.

Rem 27 : La réciproque est fausse. Cependant :

Prop 28 : Soit U un ouvert dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. U est connexe si et seulement si U est connexe par arcs.

Prop 29 : Tout convexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

II) Utilisation de la connexité

A] En analyse réelle

[1] **Thm 30 :** Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

App 31 : (Théorème des valeurs intermédiaires) Soient $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Cor 32 : Toute application continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$ admet un point fixe. [2

Thm 33 : Soit $f : E \to E'$ localement constant et E connexe. Alors f est constante.

App 34 : Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert connexe et $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable telle que $\forall x \in E$, $df_x = 0$. Alors f est constante.

B] En analyse complexe

Def 35 : Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$. On définit son indice en $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ par $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\omega}{\omega - z}$
On suppose γ C^1 par morceaux.

Prop 36 : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. De plus, Ind_γ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Cor 37 : Soient Ω ouvert convexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $z \in \Omega \setminus \gamma^*$, $f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$

App 38 : Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est ouvert, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si et seulement si f est analytique. [3

Thm 39 : (Principe du prolongement analytique) Soient Ω ouvert connexe et $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f et g coïncident sur une partie de Ω ayant un point d'accumulation alors $f = g$.

Cor 40 : L'ensemble des zéros de f sur Ω est isolé.

Thm 41 : (Principe du maximum) Soient Ω ouvert connexe, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $a \in \Omega$. Soit $r > 0$ tel que

[3] $D(a,r) \subset \Omega$. Alors $|f(a)| \leq \max_\theta |f(a+re^{i\theta})|$ avec égalité si et seulement si f est constante.

III) Connexité dans les espaces de matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

[4] **Def 42**: Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle:

- matrice de dilatation de rapport λ, $\lambda \neq 1$: $D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$.
- Matrice de transvection : $T_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$ où E_{ij} est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i \neq j$.

Thm 43: $SL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections

Cor 44: $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et les dilatations.

[6] **App 45**: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Rem 46: $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. En revanche:

App 47: Soient $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det M > 0\}$
et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det M < 0\}$

Alors $GL_n^-(\mathbb{R})$ et $GL_n^+(\mathbb{R})$ sont les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.

Thm 48: Soit $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ l'exponentielle matricielle. Alors exp est surjective. [6] DEV 2

[6] **Prop 49**: $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont aussi connexes par arcs.

Prop 50: L'ensemble $\mathcal{O}_r$ des matrices complexes de rang r est connexe.

[6] **Prop 51**: Les composantes connexes de l'ensemble des projecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont les $\mathcal{P}_r$ définit par:
$\mathcal{P}_r = \{M \in \mathcal{P} \mid rg(M) = r\}$.

En particulier, les $\mathcal{P}_r$ sont connexes.

Références:

- Analyse, Gourdon [1]
- Topologie, Queffélec [2]
- Analyse réelle et complexe, Rudin [3]
- Cours d'algèbre, Perrin [4]
- Algèbre 3, Francinou [5]
- H2G2, Caldero & Germoni [6]