205

# Espaces complets. Exemples et applications.

Cadre : Soit $(E,d)$ un espace métrique.

## I) Complétude

### A] Suites de Cauchy

Def 1 : Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$. $(x_n)$ est dite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq q \geq N, d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Ex 2 : Toute suite convergente est de Cauchy.

Rem 3 : La réciproque est fausse.

Prop 4 : Toute suite de Cauchy est bornée.

Prop 5 : Deux distances équivalentes définissent les mêmes suites de Cauchy.

Prop 6 : Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur.

### B] Espaces complets

Def 7 : $(E,d)$ est dit complet si toute suite de Cauchy de $(E,d)$ est convergente.

Ex 8 : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont complets.

Rem 9 : Cette notion n'est pas topologique : $\delta(x,y) = |\mathrm{Arctan}\, x - \mathrm{Arctan}\, y|$ définit la même topologie que $|\cdot|$ mais $(\mathbb{R}, \delta)$ n'est pas complet.

Thm 10 : (des fermés emboîtés) $(E,d)$ est complet si et seulement si pour toute suite décroissante $(F_n)$ de fermés non vides telle que $\mathrm{diam}\, F_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $\bigcap_{n \geq 0} F_n \neq \emptyset$.

Prop 11 : Si $(E,d)$ est complet, soit $F \subset E$ muni de la distance induite par $d$ sur $F$. $F$ est complet si et seulement si $F$ est fermé dans $E$.

Prop 12 : Tout espace métrique compact est complet.

Prop 13 : Si $(E_1, d_1)$ et $(E_2, d_2)$ sont complets, alors $(E_1 \times E_2, \mathrm{Max}(d_1, d_2))$ est complet.

App 16 : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sont complets pour toute norme.

## II) Espaces de Banach

### A] Généralités

Def 17 : Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la métrique induite par sa norme.

Ex 18 : Tout espace normé de dimension finie est de Banach.

Prop 19 : Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes équivalentes sur $E$. $(E, N_1)$ est de Banach $\Leftrightarrow$ $(E, N_2)$ est de Banach.

Thm 20 : Un espace vectoriel normé est de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

App 21 : (Théorème de Riesz-Fisher) $\forall p \in [1 ; \infty[$, $L^p(\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda \right)^{1/p}$ est de Banach.

### B] Applications linéaires continues

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $F$.

Prop-déf 22 : Pour $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on définit sa norme subordonnée par $|||f|||_{E,F} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$. Ceci définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Prop 23 : Soient $G$ un espace normé et $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $|||g \circ f|||_{E,G} \leq |||g|||_{F,G} \, |||f|||_{E,G}$. En particulier, si

$E=F=G$, $|||\cdot|||_{E,F}$ est une norme d'algèbre.

[1] **Thm 24 :** Si $F$ est de Banach, alors $(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$ aussi.

**Cor 25 :** En particulier, le dual topologique $E'$ est de Banach.

**App 26 :** Si $E$ est de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E,E)$ telle que $|||u|||<1$, alors $(id-u)$ est inversible et : $(id-u)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} u^n$

**App 27 :** Si $E$ est de Banach, alors $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\right)$ converge pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E,E)$. On note sa limite $\exp(u)$. Ceci définit en particulier l'exponentielle de matrices.

## C] Espaces de Hilbert

On suppose $E$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

[5] **Def 28 :** $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est dit de Hilbert si $E$ est de Banach pour la norme induite par $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

**Ex 29 :** $L^2(\mathbb{R})$ muni de $\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\,dt$ est de Hilbert.

[5] **Prop 30 :** Soit $(E, \|\cdot\|)$ de Banach. $E$ est isométriquement isomorphe à un espace de Hilbert si et seulement si on a l'identité du parallélogramme : $\forall x,y \in E$,
$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

On suppose $E$ de Hilbert.

**Thm 31 :** Soit $K \subset E$ un convexe fermé. Alors : $\forall x \in E$, $\exists!\, P_K(x) \in K$, $\|x-P_K(x)\| = d(x,K)$. De plus, $P_K(x)$ est caractérisé par : $\forall y \in K$, $Re(\langle x-P_K(x) | y-P_K(x)\rangle) \leq 0$ DEV 1

**Cor 32 :** Soit $F \subset E$ fermé. Alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

**Cor 33 :** Pour tout $A \subset E$, $A^{\perp\perp} = \bar{A}$. En particulier, $A$ est dense si et seulement si $A^{\perp} = \{0\}$.

[5] **Thm 34 :** (de représentation de Riesz) Soit $\varphi$ une forme linéaire continue sur $E$. Alors $\exists!\, x_\varphi \in E$, $\varphi = \langle x_\varphi | \cdot \rangle$.

De plus, $|||\varphi||| = \|x_\varphi\|_E$.

**Cor 35 :** $E$ est isométriquement isomorphe à $E'$ !

**App 36 :** Soit $u \in \mathcal{L}_c(E,E)$. Alors $\exists!\, u^* \in \mathcal{L}_c(E,E)$, $\forall x,y \in E$, $\langle x | u(y)\rangle = \langle u^*(x) | y \rangle$. $u^*$ est appelé adjoint de $u$. De plus, $|||u||| = |||u^*|||$.

# III) Théorèmes fondamentaux sur les espaces complets

On suppose $(E,d)$ complet.

## A] Théorème du point fixe

[3] **Def 37 :** Soit $f : E \to E$. $f$ est dite contractante si elle est $k$-lipschitzienne avec $k<1$.

**Thm 38 :** (de Banach-Picard) Toute application contractante $f$ admet un unique point fixe $a$. De plus, pour toute suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, on a :
$d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$

**App 39 :** Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach. Soient $U$ ouvert de $E$ et $f : U \to F$ $C^1$. On suppose $df_a$ est inversible pour un $a \in U$. Alors $f$ est un $C^1$-difféomorphisme local en $a$ (Théorème d'inversion locale).

[3] **Cor 40 :** Si un itéré de $f$ vérifie les hypothèses de 38 alors $f$ admet un unique point fixe.

## B] Prolongement de fonctions

On se donne $(F, \delta)$ un espace métrique complet.

[1] **Def 41 :** Soient $A \subset E$ et $f : A \to F$. On dit que $f$ satisfait le critère de Cauchy en $a \in \bar{A}$ si :
$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x,y \in B_d(a,\delta) \cap A, \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

**Ex 42 :** Les applications lipschitziennes et même uniformément continues vérifient le critère de Cauchy en tout points.

[1] Thm 43: Soient $A \subset E$, $f : A \to F$ et $a \in \bar{A}$. $f$ admet une limite en $a$ si et seulement si $f$ vérifie le critère de Cauchy en $a$.

Cor 44: Soient $A$ dense dans $E$ et $f : A \to F$ uniformément continue. Alors il existe une unique $g : E \to F$ uniformément continue telle que $g_{|A} = f$.

[2] App 45: (Théorème de Fourier-Plancherel) Il existe une unique application $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ qui prolonge la transformée de Fourier sur $L^1 \cap L^2$ et qui soit isométrique.

## C] Théorème de Baire

[3] Thm 46: (de Baire) Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Toute union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

App 47: Un espace de Banach non vide de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable.

[5] Def 48: On appelle $G_\delta$ toute intersection dénombrable d'ouverts.

Cor 49: (Théorème de Banach-Steinhaus) Soient $A \subset \mathbb{R}$, $F$ espace vectoriel normé. Soit $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de $\mathcal{L}_c(E,F)$. Alors soit $\sup_{\alpha \in A} |||\varphi_\alpha||| < \infty$, soit il existe un $G_\delta$ dense $D$ tel que $\forall x \in D, \sup_{\alpha \in A} \|\varphi_\alpha(x)\| = +\infty$

[4] App 50: Soit $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions linéaires continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ $2\pi$-périodiques. Pour $f \in C_{2\pi}$, on note $S_n(f)$ la $n$-ème somme partielle de sa série de Fourier. Alors: DEV 2

- $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un $G_\delta$ dense $D$ dans $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ tel que $\forall f \in D$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x_0)| = +\infty$
- Il existe un $G_\delta$ dense $\Delta$ dans $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ tel que $\forall f \in D$, $\{x \in \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty\}$ est un $G_\delta$ dense de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

DEV 2 [4]

Références:


- Analyse, Gourdon [1]
- Analyse réelle et complexe, Rudin [2]
- Topologie générale et analyse fonctionnelle, Schwartz [3]
- Analyse pour l'agreg, Bernis. [4]
- Eléments d'analyse (Queffélec) [5]