207

Prolongements de fonctions. Exemples et applications.

I) Prolongement d'un point de vue topologique

A] Par continuité

[1]

Prop 1: Soient E et F deux espaces métriques et $D \subset E$. Soit $f : D \to F$ et soit $a \in D$ un point d'accumulation. f est continue en a si et seulement si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$

Rem 2: Si f n'est pas définie en a mais que $l = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ existe dans F, on peut poser $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$

Alors g est continue en a.

App 3: La fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \in \mathbb{R}$ se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 1

App 4: La fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2}) \in \mathbb{R}_+$ se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 0.

B] Par densité

[1]

On suppose ici que F est complet

Def 5: On dit que f satisfait le critère de Cauchy en $a \in \overline{D}$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in B(a,\delta) \cap D, d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Ex 6: Les fonctions lipschitziennes ou uniformément continues satisfont ce critère en tout point de $\overline{D}$.

Thm 7: f admet une limite en $a \in \overline{D}$ si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy en a.

Cor 8: Supposons que D soit dense dans E et que f soit uniformément continue sur D. Alors f se prolonge de façon unique en une fonction uniformément continue sur E.

App 9: (Théorème de Fourier-Plancherel) Il existe une unique application $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ isométrique qui prolonge la transformée de Fourier sur $L^1 \cap L^2$.

C] Cas des formes linéaires sur un espace vectoriel

On suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

[6]

Thm 10: (de Hahn-Banach analytique) Soit $p : E \to \mathbb{R}$ vérifiant : ① $\forall x, y \in E, p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

② $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, p(\lambda x) = \lambda p(x)$

Soient $F \subset E$ un sous-espace et $f : F \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in E, f(x) \leq p(x)$ et qui est linéaire. Alors il existe une forme linéaire g qui prolonge f sur E telle que $g(x) \leq p(x)$ $\forall x \in E$.

Cor 11: Si f est linéaire continue, il existe g linéaire continue sur E qui prolonge f et telle que $\|g\|_E = \|f\|_F$

[3]

App 12: Soit $x \in E$. $x \in \overline{F} \Leftrightarrow \forall g \in E', g_{|F} = 0 \Rightarrow g(x) = 0$

Cor 13: $\overline{F} = E \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$.

Rem 14: $F^\perp$ est l'orthogonal au sens de la dualité. Mais cette propriété reste vraie dans le cas où E est un espace de Hilbert.

II) Prolongement et dérivation

A] Prolongement C^k

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

[2]

Thm 15: Soit $f : I \to E$ continue et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ où $a \in I$. On suppose que f' a une limite l en a. Alors f est dérivable en a.

Rem 16: L'hypothèse de continuité est essentielle : si

$f(x) = x \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x) + (x+1)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ le théorème est en défaut.

<u>Rem 17</u> : En particulier, f' est continue en a.

[2] <u>Cor 18</u> : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est C^k sur I, que $f^{(k+1)}$ existe sur $I \setminus \{a\}$ et admet une limite finie en a. Alors f se prolonge de façon C^{k+1} sur I.

<u>App 19</u> : $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ se prolonge de façon C^∞ sur $\mathbb{R}$

<u>Rem 20</u> : La fonction ainsi obtenue n'est cependant pas égale à sa somme de Taylor en 0.

B) Application aux équations différentielles

Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue.

<u>Def 21</u> : Une équation différentielle est une équation d'inconnue (y, J) où $J \subset I$ est un intervalle et $y : J \to \mathbb{R}^n$ est dérivable telle que $y' = f(t, y)$. (y, J) est dite globale si $J = I$. Elle est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.

[3] <u>Thm 22</u> : (de Cauchy-Lipschitz local) On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à la 2ème variable. Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution au voisinage de t_0.

<u>Thm 23</u> : (de Cauchy-Lipschitz global) Avec les hypothèses précédentes, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale $(\varphi ; J)$.

<u>Rem 24</u> : En appliquant Thm 15 et en utilisant le caractère maximal de (φ, J), on trouve que J est ouvert.

<u>Rem 25</u> : En général, $(\varphi ; J)$ n'est pas globale (par exemple $y' = y^2 ; y(0) = 1$).

Cherchons des conditions suffisantes pour que $(\varphi ; J)$ soit globale. Notons $J =]T_* ; T^*[$ et $I =]a ; b[$.

<u>Thm 26</u> : (de sortie des compacts) Si $T^* < b$, alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un voisinage V de T^* tel que $\forall t \in V$, $\varphi(t) \notin K$.

<u>Cor 27</u> : (Théorème d'explosion en temps fini) Si $T^* < b$, $\lim_{t \to T^*} \|\varphi(t)\| = +\infty$ [3]

<u>Rem 28</u> : On a des résultats analogues pour $T_* > a$.

<u>Cor 29</u> : (critère de prolongement) Si $(y,]\alpha ; \beta[)$ est une solution bornée au voisinage de β, alors y se prolonge au-delà de β en une solution de l'équation différentielle.

<u>Rem 30</u> : Ainsi, toute solution maximale bornée est globale.

<u>App 31</u> : Les solutions maximales de $y' = \sin(y)$ sont globales.

<u>App 32</u> : Les solutions maximales du système de Lotka-Volterra sont globales.

On dispose d'un lemme pratique pour majorer des solutions maximales :

<u>Lem 33</u> : (de Gronwall) Soient φ et ψ deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $\exists C \geq 0$, $\forall t \in [a, b]$, $\varphi(t) \leq C + \int_a^t \psi(s)\varphi(s)\,ds$ [3]

Alors $\forall t \in [a, b]$, $\varphi(t) \leq C \exp\left(\int_a^t \psi(s)\,ds\right)$

<u>App 34</u> : (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire) Les solutions maximales d'une équation différentielle linéaire sont globales.

III) Prolongement analytique

A] Cas des séries entières

[3]

Def 35: Une série entière est une série de fonctions de la forme $(\sum a_n z^n)$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Son rayon de convergence est $R = \sup \{ r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ bornée} \}$ et son disque de convergence est $D(0,R)$.

Lem 36: (d'Abel) Si $r \in [0;R[$, alors $(\sum a_n z^n)$ converge normalement sur $\overline{D(0,r)}$

Rem 37: En particulier, $(\sum a_n z^n)$ converge simplement sur $D(0,R)$. On a cependant aucune information sur son comportement au bord. Par exemple, $(\sum \frac{z^n}{n})$ est de rayon 1 et converge en $z=-1$. Cependant $(\sum z^n)$ est de rayon 1 mais diverge grossièrement en $z=-1$.

Def 38: Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est analytique en $a \in \mathbb{C}$ si f admet un développement en séries entières au voisinage de a.

On supposera $R=1$ par la suite.

Def 39: $a \in \mathcal{C}(0,1)$ est régulier pour $(\sum a_n z^n)$ si $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ se prolonge de façon analytique en a. Sinon, a est singulier.

Thm 40: $(\sum a_n z^n)$ admet au moins un point singulier.

[1]

Thm 41: (DEV1) (d'Abel angulaire) Soit f la somme de $(\sum a_n z^n)$. On suppose que $(\sum a_n)$ converge. Soit $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_{\theta_0} = \{ 1 - \rho e^{i\theta} \in D(0,1) \mid \rho > 0, \theta \in [-\theta_0; \theta_0] \}$. Alors

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Thm 42: (Taubérien faible) Réciproquement, on suppose que $a_n = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ et que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \ell$ existe et est fini. Alors $(\sum a_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$

B] Fonctions holomorphes

[2]

Thm 43: (Principe du prolongement analytique) Soient f, g holomorphes sur U un ouvert connexe. On suppose que f et g coïncident sur $A \subset U$ qui admet un point d'accumulation. Alors $f = g$.

Cor 44: (Principe des zéros isolés) Si f est holomorphe sur U ouvert connexe et non identiquement nul, alors l'ensemble des zéros de f est isolé.

[5]

Def 45: On appelle fonction poids toute fonction $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$. ρ définissant une nouvelle mesure, on note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour cette mesure. On définit le produit scalaire $\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x)\,dx$. Les polynômes orthogonaux sont les polynômes obtenus par Gram-Schmidt sur $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour ce produit scalaire.

App 46: (DEV2) Les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

[3]

Def 47: On définit la fonction Γ d'Euler par : $\forall x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

Thm 48: (DEV3) Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega_0 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$ et satisfait la formule de Weierstrass : $\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$

Rem 49: Ceci permet d'étendre Γ de façon méromorphe sur $\mathbb{C}$, et $\frac{1}{\Gamma}$ de façon holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Thm 50: (Formule des compléments) $\forall z \in \mathbb{C}, 0 < \operatorname{Re} z < 1$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Références :

- Analyse, Gourdon [1]
- Cours d'analyse, Pommellet [2]
- Eléments d'analyse, Queffélec-Zuily [3]
- Analyse complexe pour la licence, Tauvel [4]
- Objectif agrégation, Beck [5]
- Analyse fonctionnelle, Brezis [6]