208

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Cadre : E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Norme sur un espace vectoriel

A] Définition et conséquences

Def 1 : On appelle norme sur E toute application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :
- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0$ (définie)
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (positivement homogène)
- $\forall x, y \in E, \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est appelé espace vectoriel normé.

[1] Ex 2 : Si $E = \mathbb{K}^n$, les applications suivantes sont des normes sur E : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $\|x\|_\infty = \sup_{1 \le i \le n} |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Prop 3 : $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$, $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ définit une distance sur E si $\|\cdot\|$ est une norme.

Rem 4 : Un espace vectoriel normé induit alors une topologie. Par défaut, nous munirons E de cette topologie.

Def 5 : Soient N et N' deux normes sur E. N et N' sont dites équivalentes si $\exists \lambda, \mu > 0, \forall x \in E, \lambda N(x) \le N'(x) \le \mu N(x)$

Ex 6 : Si $E = \mathbb{K}^n$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes 2 à 2.

Prop 7 : Deux normes équivalentes induisent la même topologie.

B] Applications linéaires continues

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

[1] Thm 8 : Soit $\varphi : E \to F$ linéaire. On a équivalence entre :
- φ est continue sur E
- φ est continue en 0
- $\exists M > 0, \forall x \in E, \|\varphi(x)\|_F \le M \|x\|_E$
- φ est bornée sur $B_E(0,1)$

On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble de telles applications.

Prop-def 9 : Si $\varphi \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on définit sa norme opérateur par : $|||\varphi||| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \le 1} \|\varphi(x)\|_F = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|\varphi(x)\|_F$

Cette quantité est finie et définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. En particulier, si $(G, \|\cdot\|_G)$ est un autre espace normé et $\psi \in \mathcal{L}_c(F,G)$: $|||\psi \circ \varphi||| \le |||\psi|||\,|||\varphi|||$

Rem 10 : En particulier, $\forall \varphi \in \mathcal{L}_c(E,F), \forall x \in E, \|\varphi(x)\|_F \le |||\varphi|||\,\|x\|_E$

Def 11 : Si $F = \mathbb{K}$, les applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$ sont appelées formes linéaires. On note E' l'ensemble des formes linéaires appelé dual topologique de E.

Prop 12 : $\varphi \in E'$ est continue si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé dans E.

Thm 13 : (de Hahn-Banach) Soient $F < E$ et $p : E \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in E, \forall \lambda > 0, p(\lambda x) = \lambda p(x)$ et $\forall x, y \in E$, $p(x+y) \le p(x) + p(y)$. On pose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $f \in F'$ tel que $\forall x \in E, f(x) \le p(x)$. Alors il existe un prolongement g de f sur E tel que $\forall x \in E, g(x) \le p(x)$. [4]

Cor 14 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $F < E$, pour tout $f \in F'$ continue, il existe $g \in E'$ continue tel que $|||g||| = |||f|||$ (relativement à leurs domaines de définition).

C] Le cas de la dimension finie

On suppose ici E de dimension finie.

Thm 15 : Toutes les normes sur E sont équivalentes. [1]

Rem 16 : Ce théorème est faux en dimension infinie, avec par exemple $E = C^0([0,1])$, $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

Cor 17 : Toute application linéaire sur E est continue. [1]

[1] Cor 18 : E muni de n'importe quelle norme est complet.

Cor 19 : Tout sous-espace de dimension fini dans un espace vectoriel normé quelconque est fermé.

Cor 20 : Les compacts de E sont les fermés bornés.

Thm 21 : (de Riesz) Un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compact.

II) Espaces de Banach

A] Définition et premiers exemples

[2] Def 22 : Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la topologie induite par sa norme.

Ex 23 : $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. En particulier, tout espace de dimension fini est un Banach.

[1] Prop 24 : Soit E un espace vectoriel et soient N_1 et N_2 deux normes sur E. Si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors (E, N_1) est un Banach si et seulement si (E, N_2) l'est.

Prop 25 : Un espace est de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

App 26 : (Théorème de Riesz-Fischer) $\forall p \in [1, +\infty]$, L^p muni de $\|\cdot\|_p$: $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda\right)^{1/p}$ est de Banach

[1] Prop 27 : Soit F un espace de Banach. Alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de la norme opérateur est de Banach. En particulier, E' est de Banach.

Cor 28 : Soient E de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E,E)$ tel que $|||u||| < 1$. Alors $Id_E - u$ est inversible et $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = (Id_E - u)^{-1}$

B] Théorème de Baire et conséquences

Thm 29 : (de Baire) Soit (X,d) espace métrique complet. Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. [5]

App 30 : Un espace de Banach non vide de dimension infinie n'admet aucune base algébrique dénombrable.

Def 31 : Soit E un espace topologique. On appelle G_δ toute intersection dénombrable d'ouverts.

Cor 32 : Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $A \subset \mathbb{R}$ et $(\Lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille $\mathcal{L}_c(E,F)$, F espace vectoriel normé. Alors soit $\sup_{\alpha \in A} |||\Lambda_\alpha||| < \infty$, soit il existe un G_δ dense D dans E tel que $\forall x \in D$, $\sup \|\Lambda_\alpha(x)\|_F = +\infty$ (Banach-Steinhaus) [5]

App 33 : Soit $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques. Pour $f \in C_{2\pi}$, on note $S_n(f)$ la n-ème somme partielle de sa série de Fourier. Alors : [6]

- $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un G_δ D de $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ dense tel que $\forall f \in D$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x_0)| = +\infty$
- Il existe un G_δ Δ dense de $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ tel que $\forall f \in \Delta$, $\{x \in \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty\}$ est un G_δ dense de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

DEV 1

Cor 34 : Soient E et F deux Banach et $\varphi : E \to F$ linéaire continue surjective. Alors $\exists c > 0$, $B_F(0,c) \subset \varphi(B_E(0,1))$. En particulier, φ est ouverte. [5]

Thm 35 : (d'isomorphisme de Banach) Soient E et F deux Banach et $\varphi \in \mathcal{L}_c(E,F)$ bijectif. Alors $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}_c(F,E)$. [3]

Cor 36 : (Théorème du graphe fermé) Soient E et F deux espaces de Banach. On munit $E \times F$ de la topologie produit. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, f est continue si et seulement si son graphe est fermé.

[6] **App 37 :** (Grothendieck) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé. Soient $1 \leq p < \infty$ et $F \subset L^p(X)$ un sous-espace fermé tel que $F \subset L^\infty(X)$. Alors F est de dimension finie. DEV 2

III) Espaces de Hilbert

A] Définition

[2] **Déf 38 :** On appelle espace de Hilbert tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ qui est complet pour la norme induite par son produit scalaire.

Prop 39 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. E est isométrique à un espace de Hilbert si et seulement si sa norme satisfait l'identité du parallélogramme : $\forall x, y \in E$,
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Ex 40 : $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert, muni de
$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} fg$$

B] Théorème de projection

Soit $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. On note d sa distance induite par la norme.

[2] **Thm 41 :** (de projection) Soit $K \subset H$ convexe fermé. Alors $\forall x \in H, \exists! P_K(x) \in K, \|x - P_K(x)\| = d(x, K)$. De plus, $P_K(x)$ est caractérisé par : $\forall u \in K, \mathrm{Re}(\langle x - P_K(x) | u - P_K(x)\rangle) \leq 0$.

Cor 42 : Soit $F \subset H$ fermé. On note $F^\perp$ son orthogonal. Alors $H = F \oplus F^\perp$. De plus, $\forall x \in H, \|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2$

[3] **Cor 43 :** Pour tout $A \subset H$, $A^{\perp\perp} = \bar{A}$. En particulier, A est dense si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.

Thm 44 : (de représentation de Riesz) Soit φ une forme linéaire continue sur H. Alors $\exists! x_\varphi \in H, \forall x \in H, \varphi(x) = \langle x_\varphi | x\rangle$. De plus, $|||\varphi||| = \|x_\varphi\|$. [2]

Cor 45 : H est isométrique à H'.

App 46 : Soit $u \in \mathcal{L}_c(H, H)$. Alors il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}_c(H, H)$ tel que $\forall x, y \in H, \langle x | u(y)\rangle = \langle u^*(x) | y\rangle$. u^* est appelé adjoint de u. De plus, $|||u||| = |||u^*|||$. [3]

C] Bases hilbertiennes

Soit $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ espace de Hilbert.

Déf 47 : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de H. $(e_i)_{i\in I}$ est :
- orthonormée si $\forall i, j \in I, \langle e_i | e_j\rangle = \delta_{ij}$.
- totale si $H = \overline{\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}}$

Une base hilbertienne de H est une famille orthonormée totale.

Ex 48 : $(x \mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. [3]

Prop 49 : (inégalité de Bessel) Soient $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée de H et $x \in H$. Alors $\{i \in I \mid \langle e_i | x\rangle \neq 0\}$ est au plus dénombrable et $\sum_{i\in I} |\langle e_i | x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Thm 50 : On a équivalence entre :
- $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de H
- $\forall x \in H, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n | x\rangle x$
- $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n | x\rangle|^2$ (identité de Parseval)
- $\forall x, y \in H, \langle x | y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n | y\rangle \overline{\langle e_n | x\rangle}$

Thm 51 : Tout espace de Hilbert séparable est isométriquement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$.

Références :

- Analyse (Gourdon) [1]
- Éléments d'analyse (Queffélec et Zuily) [2]
- Objectif agrégation (Beck). [3]
- Analyse fonctionnelle (Brezis) [4]
- Analyse réelle et complexe (Rudin) [5]
- Analyse pour l'agreg (Bernis) [6]