209

Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

I] Approximation de fonctions par des polynômes

A] Formules de Taylor

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $f : I \to E$.

[1]

Def 1 : On appelle développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de f en $a \in I$ toute écriture $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$

Rem 2 : Les développements limités sont utiles pour comprendre le comportement d'une fonction au voisinage d'un point.

Prop 3 : Si f admet en a un D.L. d'ordre $n \geq 2$, alors f est dérivable en a et $a_0 = f(a)$, $a_1 = f'(a)$.

Rem 4 : En général, on n'a pas l'existence de $f''(a)$ même si $n \geq 2$ par exemple pour $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin(\frac{1}{x})$ si $x = 0$, $f(0) = 1$ sinon.

Thm 5 : (Formule de Taylor-Young) Si f est de classe C^n en a, alors $\forall x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$

App 6 : $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ se prolonge de façon continue en 0.

Thm 7 : (Formule de Taylor avec reste intégral) Si f est C^{n+1} en a, $\forall x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

Rem 8 : Cette dernière formule est intéressante pour calculer des erreurs, en intégration numérique par exemple, ou pour la résolution numérique d'équations différentielles.

B] Cas des fonctions continues sur un compact

[2]

Lem 9 : Soit (P_n) la suite de polynômes définis par récurrence sur $[-1;1]$: $P_0(x) = x$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2(x))$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors (P_n) converge uniformément vers $x \mapsto |x|$.

Thm 10 : (de Stone-Weierstrass) Soit K un compact d'un espace métrique. Toute sous-algèbre de $C^0(K, \mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense pour $\|\cdot\|_\infty$. [2]

Cor 11 : (Théorème de Weierstrass) Si I est fermé borné et f est continue alors f est limite uniforme d'une suite de polynômes.

App 12 : Si $I = [a,b]$ et f est continue telle que $\int_a^b f(x) x^n\,dx = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $f = 0$. [1]

Rem 13 : L'existence de la suite de polynômes est théorique mais on peut en trouver explicitement.

Cor 14 : Le théorème de Stone-Weierstrass reste vrai pour $C^0(K, \mathbb{C})$ à condition que la sous-algèbre soit stable par conjugaison. [2]

C] Espace L^2 à poids

Def 15 : On appelle fonction poids sur I toute fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I \rho(x)|x|^n\,dx < +\infty$. En particulier, ρ définit une mesure à densité par rapport à λ et on note $\langle f, g \rangle_\rho$ le produit scalaire induit par cette mesure sur $L^2(I, \rho)$ les fonctions mesurables de carrés intégrable pour ρ. [3]

Prop 16 : $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert.

Def 17 : On appelle polynômes orthogonaux la famille de polynômes obtenus en appliquant Gram-Schmidt à $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ex 18 : Pour $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on trouve les polynômes de Hermite.

[3] **Thm 19 :** (DEV1) Si $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha |x|} \rho(x)\,dx < +\infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

App 20 : Soit (P_n) les polynômes de Hermite. Alors $(P_n(x) e^{-x^2})$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

II) Régularisation par convolution

A] Convolution : définitions et propriétés

[4] **Def 21 :** Soient f, g mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Lorsqu'elle est définie, on appelle convolution de f par g : $x \mapsto f*g(x) = \int f(t) g(x-t)\,dt$

Thm 22 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1;+\infty]$, $f*g$ est définie presque partout et $f*g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Lem 23 : Soit $C_c^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$ et soit $p \in [1;+\infty[$. Alors $C_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

App 24 : $\forall p \in [1;+\infty[$, $\tau : \mathbb{R} \to L^p(\mathbb{R})$, $h \mapsto f(\cdot - h)$ est continue pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$

Cor 25 : Soient $p, q \in [1;+\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$. Alors $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$, bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$ et uniformément continue.

Thm 26 : Soient $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $g \in C_c^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$. Alors $f*g$ est de classe C^k et $(f*g)^{(k)} = f*g^{(k)}$.

Rem 27 : On a aucune hypothèse de régularité sur f.

B] Approximation de l'unité et régularisation

On souhaite mettre à profit Thm 26 pour approcher des fonctions de L^p par des fonctions régulières.

[4] **Def 28 :** Soit (χ_n) une suite de $L^1(\mathbb{R})$. On dit que (χ_n) est une approximation de l'unité si :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\chi_n \geq 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|\chi_n\|_1 = 1$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\int_{|x| \geq \varepsilon} \chi_n(x)\,dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Elle est dite régularisante si en plus $\chi_n \in C_c^\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ex 29 : Si $\chi \in L^1(\mathbb{R})$, $\chi \geq 0$ et $\|\chi\|_1 = 1$, $\chi_n(x) = n\chi(nx)$ convient.

Ex 30 : Soit $\chi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$. Alors $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

$\chi_n(x) = \frac{n\chi(nx)}{\|\chi\|_1}$ est donc régularisante.

Thm 31 : Soit (χ_n) une approximation de l'unité et $p \in [1;+\infty[$. Alors $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\|f*\chi_n - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Cor 32 : C_c^∞ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1;+\infty[$.

App 33 : (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors
$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t}\,dt = 0$$

Rem 34 : Ce résultat ne tient plus pour $p = +\infty$. Cependant :

Thm 35 : C_c^∞ est dense dans les fonctions continues bornées pour la convergence uniforme sur tout compact.

[1] **App 36 :** Avec $p_n(x) = \begin{cases} (1-t^2)^n / a_n & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où $a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,dt$

on retrouve le théorème de Weierstrass.

III) Approximation par des polynômes trigonométriques

A] Polynômes et séries trigonométriques

[1] **Def 37 :** Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $e_n : x \mapsto e^{inx}$. On appelle polynôme trigonométrique toute fonction de la forme $\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$ où $c_n \in \mathbb{C}$ $\forall n \in [-N;N]$, $N \geq 0$.

[2] **Thm 38** : L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans les fonctions continues 2π-périodiques.

Def 39 : On appelle série trigonométrique toute suite $\left(\sum_{-N}^{N} c_n e_n\right)_{N\geq 0}$ où $(c_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. On la note $(\sum c_n e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Rem 40 : Cette donnée est équivalente à celle de la suite de fonctions $\left(a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n \mathrm{Re}(e_n)+b_n \mathrm{Im}(e_n))\right)_{N\geq 0}$

[1] **Def 41** : Soit $f\in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$. La série de Fourier de f est la série trigonométrique $(\sum c_n(f)e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $\forall n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$

Rem 42 : Dans ce cas, $a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et $b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(nt)dt$

[6] **Prop 43** : $\forall f\in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\lim_{n\to+\infty} c_n(f)=0$.

B] Étude de la convergence de la série de Fourier.

Soient $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $S_n(f)=\sum_{k=-n}^{n}c_k(f)e_k$ et $\sigma_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(f)$

Def 44 : On définit le noyau de Dirichlet par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $D_n=\sum_{k=-n}^{n}e_k$ et le noyau de Féjer $K_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k$

[6] **Rem 45** On a les relations $S_n(f)=f*D_n$ et $\sigma_n(f)=f*K_n$.

Prop 46 : (K_n) est une approximation de l'unité sur $[0,2\pi]$.

Thm 47 : (de Féjer)
- Si $f\in C^0_{2\pi}$, $\|\sigma_N(f)\|_\infty\leq\|f\|_\infty$ $\forall N\in\mathbb{N}$ et $\|\sigma_N(f)-f\|_\infty\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$
- Si $f\in L^p_{2\pi}$ avec $p\in[1;+\infty[$, $\|\sigma_N(f)\|_p\leq\|f\|_p$ $\forall N\in\mathbb{N}$ et $\|\sigma_N(f)-f\|_p\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$

App 48 : On retrouve à nouveau le théorème de Weierstrass à partir de ce résultat. [6]

App 49 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Cor 50 : Si $f\in L^2_{2\pi}$, $S_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} f$. On a de plus l'identité de Parseval : $\|f\|_2^2=\sum_{n=0}|c_n(f)|^2$ où $\|f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt$

Thm 51 : (de Dirichlet) Soit $f\in C^0_{2\pi}$ qui soit C^1 par morceaux. Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$

[1] **App 52** : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

[5] **App 53** : (équation de la chaleur sur le cercle) (DEV2)
Soit $u_0\in L^2_{2\pi}$. L'équation $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ admet une unique solution $u:]0;+\infty[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\|u(t,\cdot)-u_0\|_2\xrightarrow[t\to 0]{}0$

Références :

- Analyse, Gourdon [1]
- Analyse fonctionnelle, Hirsch-Lacombe [2]
- Objectif agrégation, Beck [3]
- Théorie de l'intégration, Briane-Pagès [4]
- Calcul intégral, Candelpergher [5]
- Éléments d'analyse, Queffélec-Zuily [6]