213

Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Espaces préhilbertiens, Espaces de Hilbert

A] Produit scalaire

Def 1: On dit que E est un espace pré-hilbertien si il existe $\langle\cdot|\cdot\rangle : E\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que:

- $\forall y\in E$, $\langle\cdot|y\rangle$ est linéaire
- $\forall x\in E$, $\langle x|x\rangle\in\mathbb{R}_+$
- $\forall x\in E$, $\langle x|x\rangle=0 \Leftrightarrow x=0$
- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: $\forall x,y\in E, \langle x|y\rangle=\langle y|x\rangle$ (symétrie)
  Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: $\forall x,y\in E, \langle x|y\rangle=\overline{\langle y|x\rangle}$ (symétrie hermitienne)

Ex 2: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces pré-hilbertiens munis de $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i$ et $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$ respectivement.

On suppose par la suite que $(E,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien. On pose $\|x\|=\langle x|x\rangle^{1/2}$

Prop 3: (inégalité de Cauchy-Schwarz) $\forall x,y\in E$, $|\langle x|y\rangle|\leq\|x\|\|y\|$ avec égalité si et seulement si (x,y) est liée.

Cor 4: $\forall x,y\in E$, $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$. En particulier, $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.

Thm 5: $\forall y\in E$, $\phi_y=\langle\cdot|y\rangle$ est continue sur E, de norme $\|y\|$.

Prop 6: (identité du parallélogramme) Soient x et y dans E. Alors: $\|x-y\|^2+\|x+y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

Def 7: Soient $x,y\in E$. x et y sont dit orthogonaux si $\langle x|y\rangle$. On note $x\perp y$. Si $A\subset E$, on appelle orthogonal de A : $A^\perp=\{x\in E \mid \forall y\in A, x\perp y\}$

Prop 8: L'orthogonal d'une partie de E est fermé.

Thm 9: (de Pythagore) Soient x et y orthogonaux. Alors $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

B] Théorème de projection sur un convexe fermé

Def 10: E est dit de Hilbert si il est complet pour la norme induite par son produit scalaire.

Ex 11: $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Hilbert.

Ex 12: $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert muni de $\langle u|v\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\overline{v_n}$.

Thm 13: Soit F un espace de Banach. F est isométriquement isomorphe à un espace de Hilbert si et seulement si sa norme satisfait l'identité du parallélogramme.

On suppose à partir de maintenant que E est un espace de Hilbert.

Thm 14: (DEV 1) (de projection sur un convexe fermé) Soit C un convexe fermé non vide de E. Alors $\forall x\in E, \exists!\, P_C(x)\in C, \|x-P_C(x)\|=d(x,C)$. De plus, $P_C(x)$ est caractérisé par: $\forall z\in C$, $\mathrm{Re}(\langle x-P_C(x)|z-P_C(x)\rangle)\leq 0$

Prop 15: $P_C : \begin{array}{l} E\longrightarrow C \\ x\longmapsto P_C(x)\end{array}$ est 1-lipschitzienne.

Prop 16: Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors $P_F\in\mathcal{L}(E,F)$. De plus, pour tout $x\in E$, $P_F(x)$ est l'unique élément de E tel que $P_F(x)\in F$ et $x-P_F(x)\in F^\perp$.

Cor 17: Dans ce cas, $E=F\oplus F^\perp$ et $\forall x\in E$, $d(x,F)=\|x-P_F(x)\|$

[1] **Cor 18:** Si $F < E$ alors $F^{\perp\perp} = \overline{F}$. En particulier, F est dense si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

C] Dualité

Thm 19: (de Riesz) $\forall \phi \in E', \exists ! y \in E, \phi = \langle \cdot | y \rangle$. De plus, $\|\phi\| = \|y\|$.

App 20: Soit $f : E \to \mathbb{R}$, C^1 en $a \in E$. $\exists ! \nabla f(a) \in E$, $df_a = \langle \cdot | \nabla f(a) \rangle$

[1] **App 21:** Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. $\exists ! T^* \in \mathcal{L}(E)$, $\forall x, y \in E$, $\langle T(x) | y \rangle = \langle x | T^*(y) \rangle$. T^* est appelé adjoint de T. De plus, $\|T\| = \|T^*\|$.

Rem 22: Si $E = \mathbb{K}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, T s'identifie à une matrice. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, T^* est sa matrice conjuguée. Si $T = \mathbb{C}$, T^* est la trans-conjuguée.

Def 23: Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que (x_n) converge faiblement vers $x \in E$, et on note $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ si $\forall y \in E$, $\langle x_n | y \rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x | y \rangle$.

Prop 24: Lorsqu'elle existe, la limite faible est unique.

Rem 25: $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$. La réciproque cependant est fausse : $E = \ell^2(\mathbb{N})$, $(x_n)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Thm 26: (DEV2) (de Banach-Alaoglu) Toute suite bornée de E admet une sous-suite faiblement convergente.

App 27: Soit $J : E \to \mathbb{R}$ continue, convexe et coercive, c'est-à-dire $J(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors J atteint son minimum en un point $x^* \in E$.

Prop 28: Si $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$ et $T \in E'$ alors $T(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T(x)$.

II) Bases hilbertiennes

A] Familles orthogonales, orthonormées

Def 29: Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de E est dite orthogonale si $\forall i \neq j \in I$, $x_i \perp x_j$.

Prop 30: Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Def 31: Une famille orthogonale est dite orthonormée si tous ses vecteurs sont de normes 1.

Prop 32: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée finie de E. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$. Alors $\forall x \in E$, $P_F(x) = \sum_{i\in I} \langle x | e_i \rangle e_i$

Thm 33: (inégalité de Bessel) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de E. Alors : $\forall x \in E$,
$$\sum_{i\in I} |\langle x | e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Thm 34: (orthonormalisation de Gram-Schmidt) Soit $N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $(f_i)_{1\leq i<N}$ une famille libre de E. Alors il existe une famille $(e_i)_{1\leq i<N}$ orthonormée qui engendre le même espace que $(f_i)_{1\leq i<N}$.

B] Familles totales

Def 35: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée de E. $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E si elle est totale c'est-à-dire : $E = \overline{\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}}$

Ex 36: La remarque 25 donne une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Rem 37: Une base hilbertienne n'est pas nécessairement algébrique : $(\frac{1}{n})$ est une suite de $\ell^2(\mathbb{N})$ ne s'exprimant pas comme combinaison linéaire finie des (e_k).

[1]

Thm 38 : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée. On a équivalence entre :
① $(e_i)_{i\in I}$ base hilbertienne
② $\forall x\in E, \|x\|^2=\sum_{i\in I}|\langle x|e_i\rangle|^2$ (égalité de Parseval)
③ $\forall x,y\in E, \langle x|y\rangle=\sum_{i\in I}\langle x|e_i\rangle\overline{\langle y|e_i\rangle}$

Thm 39 : Soit $(e_i)_{i\in I}$ base hilbertienne. Alors $\forall x\in E$,
$x=\sum_{i\in I}\langle x|e_i\rangle e_i$

Prop 40 : E est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne dénombrable.

Prop 41 : Si $\dim E=+\infty$, E est séparable si et seulement si il est isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$.

III) Séries de Fourier

[2]

Thm 42 : Soit L^2 l'espace des classes de fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodiques Lebesgue-intégrables de carré intégrable. On munit L^2 du produit scalaire : $\langle f|g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\overline{g(t)}dt$. Alors L^2 est un espace de Hilbert.

Ex 43 : Soit e_n définie par : $\forall t\in\mathbb{R}, e_n=e^{int}$. $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une famille orthonormée de L^2.

Def 44 : Soit $f\in L^2$ et soit $n\in\mathbb{Z}$. On définit le n-ème coefficient de Fourier par $c_n(f)=\langle f|e_n\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}dt$
On définit la N-ème somme partielle de Fourier, $N\in\mathbb{N}$, par : $S_N(f)=\sum_{n=-N}^{N}c_n(f)e_n$. On dit que la série de Fourier converge si $(S_N(f))_N$ converge.

[2]

Rem 45 : $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathrm{Vect}(e_n)_{-N\le n\le N}$

Thm 46 : (de Fejér) Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue 2π-périodique et $(\sigma_N(f))$ la suite des moyennes de Césaro de f. Alors $\|\sigma_N(f)-f\|_\infty\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$

Cor 47 : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2.

Cor 48 : D'après la théorie des espaces de Hilbert, on obtient alors $S_N(f)\xrightarrow[N\to+\infty]{L^2}f$ et $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}|c_n(f)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt$

App 49 : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

IV) Espace L^2 à poids

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

[4]

Def 50 : On appelle fonction poids une fonction $\rho:I\to\mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que $\forall n\in\mathbb{N}, \int_I|x|^n\rho(x)dx<+\infty$.
On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carrés intégrables pour la mesure à densité $\rho\, d\lambda$.

Prop 51 : $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert muni de $\langle f,g\rangle_\rho=\int_I f(t)\overline{g(t)}\rho(t)dt$.

Prop-def 52 : Il existe une unique famille (P_n) de polynômes orthogonaux tels que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg P_n=n$. Ces polynômes sont appelés polynômes orthogonaux pour ρ.

Ex 53 : Pour $I=\mathbb{R}$, $\rho(x)=e^{-x^2}$, ce sont les polynômes de Hermite.

Thm 54 : (DEV 2) Si $\exists\alpha>0 / \int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx<+\infty$, cette famille induit une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

App 55 : Si (P_n) est la suite des polynômes de Hermite, $(x\mapsto P_n(x)e^{-x^2/2})$ induit une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Livres :

- Éléments d'analyse fonctionnelle (Hirsch-Lacombe) [1]
- Éléments d'analyse (Queffélec-Zuily) [2]
- Analyse fonctionnelle (Brezis) [3]
- Objectif Agrégation (Beck) [4]