214

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Cadre : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$.

I] Théorème d'inversion locale

A] Enoncé et premières conséquences

[3]

Def 1 : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$. f est un C^k difféomorphisme, $k \geq 1$, si f est bijective et que f et f^{-1} sont C^k.

Rem 2 : Dans ce cas, $\forall x \in U$, df_x est inversible d'inverse $df^{-1}_{f(x)}$.

Def 3 : On dit que f est un C^k-difféomorphisme local si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ avec $x \in U$, $f(x) \in V$ tels que $f|_U : U \to V$ soit un C^k difféomorphisme.

Thm 4 : (d'inversion locale) Soit f de classe C^k de U dans $\mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\exists a \in U$ / df_a est inversible. Alors f est un C^k-difféomorphisme local en a.

[4] **Rem 5 :** On peut voir ceci comme une généralisation de la proposition suivante : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^1 tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$, alors $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe et est C^1.

[3] **Cor 6 :** Si la différentielle de f est inversible en tout point, alors f est un C^k-difféomorphisme local.

[4] **Rem 7 :** On peut généraliser ce résultat à des espaces de Banach. Il faut alors supposer df_a bicontinue. [4]

[1]

Thm 8 : (d'inversion globale) Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est C^1. Alors f est un C^1-difféomorphisme si et seulement si f est injective et $\forall x \in U$, df_x est inversible.

Thm 9 : (d'inversion globale holomorphe) Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et injective sur U ouvert. Alors f^{-1} est holomorphe sur $f(U)$.

B] Applications en algèbre

[1] **App 10 :** Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un ouvert U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant I tel que $\forall A \in U$, $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = B^k$.

[3] **Thm 11 :** (de changement de coordonnées) Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions numériques C^1 définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$. Les relations $u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$ définissent un changement de coordonnées au voisinage de a si et seulement si $\det(\mathrm{Jac}_a(f)) \neq 0$.

Ex 12 : Le changement de variable polaire : $f_1(r, \theta) = r\cos\theta$, $f_2(r, \theta) = r\sin\theta$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

DEV 1

Prop 13 : $\forall C \in GL_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[C]^\times$.

App 14 : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$.

C] Application en géométrie différentielle

[3] **Def 15 :** Soit $a \in U$. On dit que f est une immersion

(resp. une submersion) en a si df_a est injective (resp. surjective).

On dit que f est une immersion (resp. submersion) si elle est une immersion (resp. submersion) en tout point.

[3] **Thm 16 :** Soit f de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. On suppose que $0 \in U$ et que f est une immersion en 0. Alors il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ contenant 0, un ouvert U' de U tel que $f(U') \subset V$ et un difféomorphe φ de V sur son image tels que : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in U'$, $\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$

Thm 17 : Si cette fois-ci f est une submersion en 0, il existe W un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et ψ un difféomorphisme de W sur son image tels que $\psi(W) \subset U$ et $\forall (x_1, \dots, x_n) \in W$, $f(\psi(x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_m)$

Rem 18 : Ceci nous permet de connaître localement, à changement de variable près, les immersions et les submersions.

[2] **Lem 19 :** (de Morse) Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3 telle que $df_0 = 0$, $d^2 f_0$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$ avec $\varphi(0) = 0$ tel que, si $u_i = \varphi_i(x)$, $f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2$

II) Théorème des fonctions implicites

A] Énoncé, lien avec l'inversion locale

[2] **Thm 20 :** (des fonctions implicites) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^k. On suppose que la différentielle partielle $d_y f(a,b)$ dans la direction $\{0\} \times \mathbb{R}^p$ est inversible. Alors il existe V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : V \to W$ un C^k difféomorphisme unique tel que $\forall x \in V, \forall y \in W$, $f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$.

Rem 21 : Ceci permet alors de voir localement l'ensemble des solutions de $f(x,y) = 0$ comme le graphe d'une fonction C^k de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. [2]

Rem 22 : La fonction φ est implicite, c'est-à-dire qu'on ne sait pas a priori déterminer φ. On a cependant :

Prop 23 : Avec les notations du théorème, $d_y f(x,y)$ est inversible pour tout $(x,y) \in V \times W$ et : $\forall x \in V$,
$$d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$$

Ex 24 : Le théorème s'applique pour l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$ en $(0,1)$: localement, $y = \varphi(x)$ avec $\varphi'(x) = -\frac{x}{y}$.

Thm 25 : Le théorème des fonctions implicites et le théorème d'inversion locale sont équivalents.

B] Quelques applications

App 26 : En appliquant les fonctions implicites à $f : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(P, x) \mapsto P(x)$ qui est C^∞, si $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ admet une racine simple $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe V un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$, U un voisinage de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi : U \to V$ C^∞ telle que $\forall P \in U$, $x = \varphi(P) \iff P(x) = 0$. [1]

Cor 27 : L'ensemble des polynômes scindés à n

[1] racines simples est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$

Rem 29 : Le théorème trouve en particulier de nombreuses applications dans la caractérisation des sous-variétés.

III) Application aux sous-variétés

A] Définitions des sous-variétés

Def 29 : $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension $p \in \mathbb{N}$ si $\forall x \in M$, il existe des voisinages ouverts de x et 0, U et V dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tels que $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ et $\varphi(x) = 0$.

Rem 30 : φ est appelé redressement local de M (voir Fig 1).

[3] Ex 31 : Les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension n sont exactement les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Thm 32 : (des sous-variétés) Les propositions suivantes sont équivalentes, étant donné $M \subset \mathbb{R}^n$:
- M est une sous-variété de dimension p.
- $\forall a \in M$, il existe U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a et $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion tel que $U \cap M = g^{-1}(0)$
- $\forall a \in M$, il existe V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une immersion qui soit un homéomorphisme de Ω dans $U \cap M$.
- M est localement le graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$ qui soit C^1.

Ex 33 : La sphère S^n est une sous-variété de dimension n.

Ex 34 : Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

B] Plan tangent à une sous-variété

[3] Def 35 : Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et soit $m \in M$. On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est tangent à m si il existe $\gamma :]-\varepsilon ; \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ différentiable tel que $\gamma(]-\varepsilon;\varepsilon[) \subset M$, $\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = m$. On définit l'ensemble des vecteurs tangents à m par $T_m(M)$ appelé plan tangent de M en m.

[3] Ex 36 : Si C est l'image de $t \mapsto (t^2 ; t^3)$ dans $\mathbb{R}^2$, $T_{(0,0)}(C) = \{\vec{0}\}$.

Prop 37 : $\forall a \in M$, $\dim T_a M = p$.

Cor 38 : Si M est de dimension p et de dimension q alors $p = q$.

Ex 39 : La courbe de Ex 36 n'est pas une sous-variété.

Cor 39 : Si φ est une paramétrisation locale en $a \in M$, alors $T_a M = d\varphi_0^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

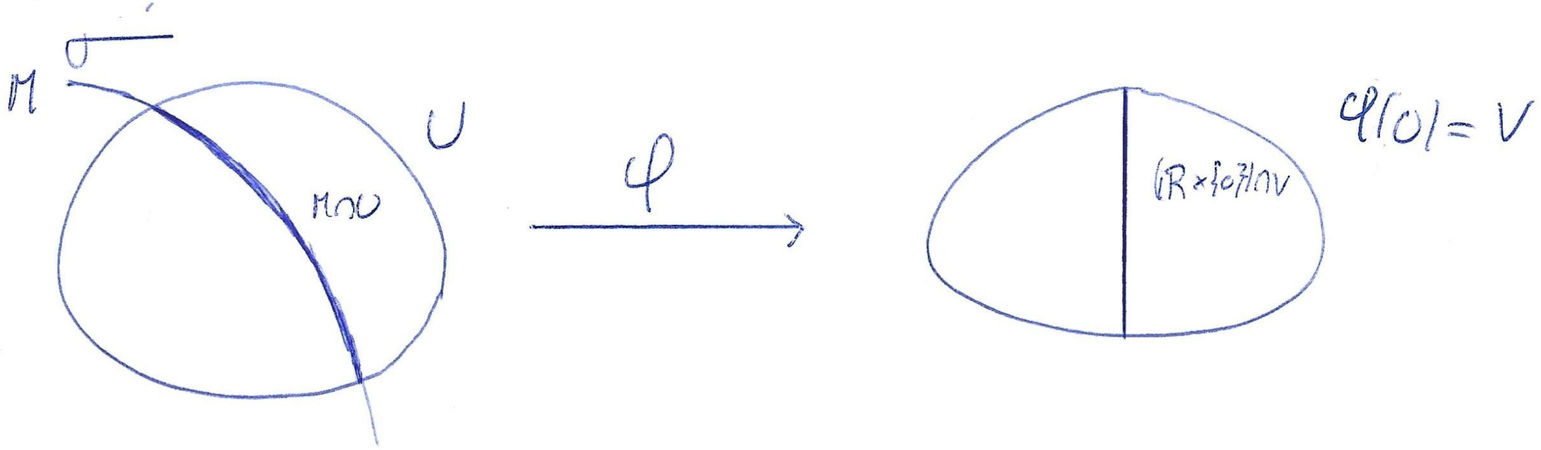
C] Extrémas liés et multiplicateurs de Lagrange

[5] Thm 40 : (DEV 2) (des extrémas liés) Soit $\Gamma = \{x \in U \mid \forall i \in [\![1;m]\!], g_i(x) = 0\}$ où $g_i : U \to \mathbb{R}$ est C^1 $\forall i$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$. Si $x^* \in \Gamma$ est un extremum local de f, que f est de classe C^1 et que $dg_1(x), \dots, dg_m(x)$ sont linéairement indépendants pour tout $x \in U$ alors $\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^n$, $df_{x^*} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i dg_{i,x^*}$. Les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

[1] Rem 41 : Ceci exprime le fait que $\nabla f(x^*)$ est orthogonal à $T_{x^*} M$.

[4] App 42 : On peut retrouver des inégalités célèbres. Par exemple en étudiant $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ et $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$, on retrouve l'inégalité arithmético-géométrique.

App 43 : Le maximum global de $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ sur $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^4}{\lambda_i^4} = 1\}$ où $\lambda_i > 0$ est $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^4\right)^{1/2}$



Références :

- Objectif agrégation, Beck [1]
- Le petit guide de calcul différentiel, Rouvière. [2]
- Introduction aux variétés différentielles, Lafontaine [3]
- Analyse, Gourdon [4]
- Calcul différentiel, Avez [5]