215

Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Cadre : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

I) Application différentiable

Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$.

A] Calculs et propriétés

[1]

Def 1 : f est dit différentiable en a s'il existe φ dans $\mathcal{L}(U, \mathbb{R}^p)$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a+h \in U$, on a $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o_0(\|h\|)$.

Rem 2* : Cette définition est indépendante des normes choisies.

Thm-def 3 : Lorsque φ existe elle est unique. On l'appelle différentielle de f en a, notée df_a. Si f est différentiable sur tout U, ceci définit l'application différentielle de f : $a \mapsto df_a$ notée df.

Ex 4 : Si $n=1$, $df_a(h) = hf'(a)$ $\forall h \in \mathbb{R}$.

Prop 5 : Si f est linéaire, f est différentiable sur U et $\forall a \in U$, $df_a = f$.

Prop 6 : Soient $g : U \to \mathbb{R}^p$, $a \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont différentiables en a, alors $f + \lambda g$ aussi et $d(f+\lambda g)_a = df_a + \lambda dg_a$.

Thm 7 : Soient $g : V \to \mathbb{R}^q$, $q \geq 1$ et $a \in U$ tels que $f(U) \subset V$, V ouvert de $\mathbb{R}^p$, f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

Prop 8 : Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ bilinéaire. Alors B est différentiable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $dB_{(a,b)}(h,k) = B(a,k) + B(h,b)$.

Ex 9 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est s.d.p et $b \in \mathbb{R}^n$, alors $f : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ est différentiable et : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $df_x(h) = \langle h, Ax - b\rangle$.

Prop 10* : Si f est différentiable sur U, alors f est continue.

B] Dérivées partielles

Def 11 : Soient $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Si $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, f est dite dérivable en a selon v et on note $f'_v(a)$ cette dérivée. [1]

Prop 12 : Si f est différentiable en a, elle est dérivable selon tout vecteur et $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $f'_v(a) = df_a(v)$.

App 13 : Diff du déterminant] DEV 1

Rem 14 : La réciproque est fausse avec $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0,y) = y$.

Def 15 : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $\forall i \in [\![1;n]\!]$, f dérivable en a selon e_i, on appelle dérivée partielle en a d'indice i : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a)$ $\forall i \in [\![1;n]\!]$. [1]

Thm-def 16 : Si f est différentiable en a, alors $\exists! u \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n / a+h \in U$, $df_a(h) = \langle u, h\rangle$. u est appelé gradient de f en a, noté $\mathrm{grad}_a(f)$ et $\mathrm{grad}_a(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{1\leq i\leq n}$ [3]

Def 17 : f est dite $\mathcal{C}^1$ sur U si f est différentiable sur U et df est continue de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ muni de la norme opérateur. [1]

Thm 18 : f est $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les dérivées partielles de f existent et sont continues.

Ex 19 : 14 donne une fonction non différentiable en 0 admettant pourtant des dérivées partielles.

Prop 20 : Si $f = (f_1, \dots, f_p)$, f est différentiable en a si et seulement si f_i l'est aussi $\forall i \in [\![1;p]\!]$. [1]

Def 21 : Si $f = (f_1, \dots, f_p)$ est différentiable en a, on appelle matrice Jacobienne de f en a la matrice $\mathrm{Jac}_a(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$

App 22 : (changement de variable)

C] Inégalité de la moyenne :

[3]

Thm 23 : Soient $a, b \in U$ tels que $[a;b] \subset U$. On suppose f continue sur $[a;b]$ et différentiable en tout point de $]a;b[$. Si $\exists M>0$, $\|df_c\| \leq M$ $\forall c \in]a;b[$, alors $\|f(a)-f(b)\| \leq M\|a-b\|$

Cor 24 : Si U est convexe, $df = 0 \Leftrightarrow f$ constante sur U.

Cor 25 : Si U est convexe et que $\exists k>0$, $\forall c \in U$, $\|df_c\| \leq k$ alors f est k-lipschitzienne.

II) Différentielles d'ordre supérieur

A] Fonctions $\mathcal{C}^k$.

[3]

Def 26 : Sous réserve d'existence, on définit par récurrence la différentielle d'ordre $k+1$ par $d^{k+1}f = d(d^k f)$. f est dite $\mathcal{C}^k$ si $d^k f$ existe et est continue. Si $\forall k \in \mathbb{N}$, f est $\mathcal{C}^k$, f est dite $\mathcal{C}^\infty$.

Rem 27 : $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}^k(E,F))$ est identifié à $\mathcal{L}^{k+1}(E,F)$

Thm 28 : (de Schwarz) Si f est $\mathcal{C}^2$, alors :

$$\forall a \in U, \forall i,j \in [\![1;n]\!], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Cor 29 : Si f est $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, alors $d^k f$ est symétrique

B] Formules de Taylor et recherche d'extrema

[3]

Prop 30 : (Taylor-Young) Si f est k fois différentiable en a, alors pour $h \in \mathbb{R}^n$ petit : $f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(a)(h)^i + o(\|h\|^k)$ où $d^i f(a)(h)^i = d^i f(a)(\underbrace{h, \dots, h}_{i \text{ fois}})$

Ex 31 : A l'ordre 2 : $f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2} d^2 f(a)(h,h) + o(\|h\|^2)$

Thm 32 : (Taylor avec reste intégral) On suppose f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a;a+h] \subset U$:

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(a)(h)^i + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1}\, dt$$

Def 33 : $a \in U$ est dit critique si $df_a = 0$.

Prop 34 : Un extremum local est un point critique.

App 35 : Algorithme du gradient à pas optimal.

Rem 36 : La réciproque est fausse.

Def 37 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable en a, on appelle matrice Hessienne de f en a : $Hess_a(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

D'après Thm 28, ceci définit une forme quadratique.

Thm 38 : Si a est un minimum (resp. maximum) local de f, alors $Hess_a(f)$ est une forme quadratique positive (resp. négative).

Thm 39 : Réciproquement, si $Hess_a(f)$ est définie positive (resp. négative), a est un minimum (resp. maximum) local strict de f.

III) Difféomorphismes et utilisation en géométrie différentielle

A] Difféomorphismes, difféomorphismes locaux

Def 40 : f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme, $k \geq 1$, si elle est $\mathcal{C}^k$ et admet une réciproque $\mathcal{C}^k$. f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local si $\forall a \in U$, il existe V_a un voisinage ouvert de a tel que $f_{|V_a}$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Ex 41 : $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times]0;\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2$, $(r;\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur son image. C'est le changement en coordonnées polaires.

App 42 : Calcul de l'intégrale de Gauss.

On pose $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

B] Inversion locale, fonctions implicites

[3] **Thm 43 :** (d'inversion locale) Si f est $\mathcal{C}^k$ et que df_a est inversible, alors f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en a.

[2] **App 44 :** Lemme de Morse] DEV.

[3] **Thm 45 :** (des fonctions implicites) Si $U \subset E\times F$, avec E, F et G de dimensions finies, si $f : U \to G$ est $\mathcal{C}^k$, on suppose que $\exists (a,b)\in U$, $f(a,b)=0$. On suppose que la différentielle de $y \mapsto f(a,y)$ en b soit un isomorphisme. Alors il existe un voisinage ouvert $U_a\times U_b$ de (a,b) dans U, et $\varphi : U_a \to U_b$ $\mathcal{C}^k$ tels que :

$$\forall (x,y)\in U_a\times U_b,\ f(x,y)=0 \iff y=\varphi(x)$$

[4] **Def 46 :** Soient $f : U\to\mathbb{R}^m$ et $a\in U$. f est une immersion en a si df_a est injective. C'est une submersion en a si df_a est surjective.

Thm 47 : Si f est une immersion en 0, alors il existe V un ouvert contenant 0, dans U, et φ un difféomorphisme de V sur son image tel que : $\varphi(f(x_1,\dots,x_p)) = (x_1,\dots,x_p,0,\dots,0)$
Si f est une submersion en 0, alors de même, il existe un difféomorphisme φ tel que $f(\varphi(x_1,\dots,x_p)) = (x_1,\dots,x_n)$

C] Application aux sous-variétés

[4] **Def 48 :** On dit que $M\subset\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p si pour tout $x\in M$, il existe des voisinages ouverts de x et 0, U et V, et un difféomorphisme $\varphi : U\to V$ tel que $\varphi(U\cap M) = V\cap(\mathbb{R}^p\times\{0\})$. Si φ est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme, M est dit de classe $\mathcal{C}^k$.

Thm 49 : Les assertions suivantes sont équivalentes :

[4]
- M est une sous-variété de dimension p
- Pour tout $a\in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $g : U\to\mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U\cap M = g^{-1}(0)$.
- Pour tout $a\in M$, il existe U ouvert contenant a, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $h : \Omega\to\mathbb{R}^n$ qui soit une immersion et un homéomorphisme de Ω sur $U\cap M$
- M est localement le graphe d'une fonction à p variables de classe $\mathcal{C}^1$.

App 50 : La sphère $\mathbb{S}^n$ est une sous-variété de dimension n.

Def 51 : Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ et soit $a\in M$. Un vecteur $v\in\mathbb{R}^p$ est dit tangent à M en a s'il existe $\varepsilon>0$ et $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to\mathbb{R}^p$ différentiable tel que $\gamma(]-\varepsilon,\varepsilon[)\subset M$, $\gamma(0)=a$, $\gamma'(0)=v$. On note T_aM l'ensemble de tels vecteurs, appelé espace tangent de M en a.

Prop 52 : Si M est donnée par une submersion g en a, alors $T_aM = \ker dg_a$.

E53 : $\forall a\in\mathbb{S}^n$, $T_a\mathbb{S}^n = a^\perp$.

Références :

- Analyse, Gourdon [1]
- Petit guide de calcul diff, Rouvière [2]
- Objectif agreg, Beck [3]
- Introduction aux variétés différentielles, Lafontaine [4]