220

Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

I) Équations différentielles ordinaires

Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$.

A] Définitions

[2] **Def 1**: On appelle équation différentielle ordinaire (EDO) une équation $Y' = f(t, Y)$ où f continue et $Y : I \to \Omega$ C^1. Un problème de Cauchy est une EDO auquel on ajoute une condition initiale : $Y(t_0) = Y_0$, $t_0 \in I$, $Y_0 \in \Omega$.

[1] **Rem 2**: Plus généralement, on définit une EDO d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ de la forme $y^{(p)} = f(t, y, y', \dots, y^{(p-1)})$. Cependant on se ramène au cas $p = 1$ via $Y = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$.

Ex 3: $y'' + \omega^2 y = 0$ sur $I = \mathbb{R}$ est une EDO. Une condition initiale en 0 correspond à la donnée de $\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$.

Soit $(C) \begin{cases} Y' = f(t, Y) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$ un problème de Cauchy sur I.

[2] **Def 4**: Une solution de (C) est un couple (y, J) où $J \subset I$ est un intervalle contenant t_0 et $y : J \to \Omega$ est C^1 et satisfaisant (C). Un prolongement de (y, J) est une autre solution $(\tilde{y}, \tilde{J})$ où $J \subset \tilde{J}$ et $\tilde{y}_{|J} = y$. (y, J) est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement non trivial. Elle est dite globale si $J = I$.

Ex 5: La fonction nulle est solution maximale et globale, sur $\mathbb{R}$, de $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$.

[2] **Rem 6**: Toute solution globale est maximale. La réciproque est fausse.

Ex 7: La solution maximale de $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $I = \mathbb{R}$ n'est pas globale.

B] Existence et unicité des solutions

Def 8: f est dite localement lipschitzienne par rapport à y si $\forall (t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un voisinage V ouvert de (t_0, x_0) et $C > 0$ tels que $\forall x_1, x_2 \in \Omega$, $(t, x_1) \in V$ et $(t, x_2) \in V \Rightarrow \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\|$ où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. [3]

Ex 9: Si f est C^1, f est localement lipschitzienne en y.

Lem 10: Soit $J \subset I$ intervalle contenant t_0. (Y, J) est solution de (C) si et seulement si Y est continue et $\forall t \in J$, $Y(t) = Y_0 + \int_0^t f(s, Y(s))\, ds$.

Rem 11: On est ramené à la recherche d'un point fixe.

Thm 12: (de Cauchy-Lipschitz local) Si f est localement lipschitzienne en y, (C) admet une unique solution au voisinage de t_0.

Cor 13: (Théorème de Cauchy-Lipschitz global) Si f est localement lipschitzienne en y, (C) admet une unique solution maximale.

Rem 14: Si f est seulement continue, on a l'existence mais on perd l'unicité : $\begin{cases} y' = 3 y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$. [2]

C] Critères de prolongement

On suppose les hypothèses de Cauchy-Lipschitz vérifiées. On souhaite trouver des conditions suffisantes pour que la solution maximale (φ, J) de (C) soit globale.

Lem 15: Pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe V voisinage ouvert de x_0, I intervalle ouvert centré en t_0 tels que pour tous $(t_1, x) \in I \times V$, il existe une solution y définie sur I telle que $y(t_1) = x$. [1]

Thm 16: (de sortie des compacts) Soient $I =]a, b[$ et (φ, J) la solution maximale de (C). Si $J =]T_*, T^*[$ avec $T^* < b$, alors pour tout compact K de Ω, il existe un voisinage

V de β tel que $\forall t \in V, \varphi(t) \notin K$.

[1] **Cor 17** : (explosion en temps fini) Si $T^* < b$, $\lim\limits_{t \to T^*} \|\varphi(t)\| = +\infty$.
En particulier, si φ est bornée, on a nécessairement $J = I$.

App 18 : Les solutions maximales de $y' = \sin(y)$ sont globales.

On a un lemme pratique pour majorer les solutions maximales :

[1] **Lem 19** : (de Gronwall) Soient $\psi, y : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ telles que $\exists C > 0, \forall t \in [a,b], y(t) \leq C + \int_a^t y(s)\psi(s)\,ds$. Alors
$\forall t \in [a,b],\ y(t) \leq C \exp\left(\int_a^t \psi(s)\,ds\right)$

II) Quelques exemples de résolution d'EDO

A] Equations différentielles linéaires

[1] **Def 20** : L'EDO est dite linéaire si $f(t, Y) = A(t)Y + B(t)$ avec $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Thm 21 : (de Cauchy-Lipschitz linéaire) Dans ce cas, les hypothèses de Cauchy-Lipschitz sont vérifiées. De plus, les solutions maximales sont globales.

On se placera sur $I = \mathbb{R}$.

Prop 22 : L'ensemble des solutions de $Y' = f(t, Y)$ est un espace affine de dimension n.

Rem 23 : Il suffit alors, pour résoudre $Y' = A(t)Y + B(t)$, de résoudre $Y' = A(t)Y$ et de trouver une solution particulière de l'EDO de départ.

Def 24 : Une base fondamentale est une base $(Y_1, \dots, Y_n)$ de l'espace des solutions de $Y' = A(t)Y$. Leur Wronskien est $W(t) = \det(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$.

Prop 25 : W est C^1 et $\forall t \in \mathbb{R}$, $W'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\, W(t)$

[2] **App 26** : (DEV 1) Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ π-périodique et pair. On étudie à l'aide du Wronskien et d'une base de solutions le caractère borné des solutions de l'équation de Hill-Mathieu : $y'' + qy = 0$.

Prop 27 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La solution de $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ est alors $t \mapsto \exp(tA)Y_0$. [5]

Prop 28 : Soit (E) $y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_0 y = 0$, $a_i \in \mathbb{C}\ \forall i$ et soit $P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 = \prod\limits_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{r_i}$. Alors $(t \mapsto t^k e^{\lambda_i t})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 0 \leq k \leq r_i}}$ est une base fondamentale de (E).

Rem 29 : On obtient un résultat similaire sur $\mathbb{R}$ en prenant les parties réelles et imaginaires.

Meth 30 : (Variation des constantes) Lorsque l'on connaît une base fondamentale $(Y_1, \dots, Y_n)$, on peut chercher une solution particulière de la forme $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i$ où $\lambda_i : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ sont C^1. On obtient alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i' Y_i = B(t)$ ce qui revient à inverser $(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$. [7]

Ex 31 : On souhaite résoudre (E) $y' + y = \sin(t)$. $(t \mapsto e^{-t})$ forme une base fondamentale de (E). En appliquant la méthode de variation de la constante, on trouve comme solution $t \mapsto \frac{\sin t - \cos t}{2}$. Les solutions de (E) sont donc de la forme $t \mapsto \frac{\sin t - \cos t}{2} + \lambda e^{-t}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

B] Utilisation des séries entières

En développant en séries entières (DSE) on peut avoir une solution particulière. Utilisé avec Cauchy-Lipschitz cela nous permet d'avoir le DSE de certaines solutions.

Ex 32 : $f : \left]-1;1\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)^2$ satisfait $(1 - x^2) f''(x) - x f'(x) = 2$. [7]
On obtient alors $\forall x \in \left]-1;1\right[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n-2}(n-1)!^2}{n(2n-1)!} x^{2n}$.

App 33 : (DEV 2) Soit $xy'' + y' + xy = 0$ l'équation de Bessel sur $\mathbb{R}$. Il existe une unique solution f DSE en 0 telle que $f(0) = 1$. De plus, si g est une autre solution sur $\left]0; \alpha\right[$, $\alpha > 0$ non colinéaire à f, alors g est non bornée. [4]
En particulier $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x \sin(\theta))\,d\theta$

III) Étude qualitative de systèmes autonomes

La résolution étant rare, on aimerait avoir des informations sur les trajectoires.

A] Points d'équilibre stables, instables

Def 34: (C) est dit autonome si $f(t,y)$ ne dépend pas de t.

Ex 35: Les EDL à coefficients constants sont autonomes.

On notera par la suite $f(y)$ au lieu de $f(t,y)$.

Def 36: $x_0 \in \Omega$ est un point d'équilibre si $f(x_0)=0$. Il est :

- stable si pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que si y est une solution vérifiant en un t_0 $\|y(t_0)-x_0\|\le\delta$, alors y est définie pour tout $t\geq t_0$ et $\|y(t)-x_0\|\le\varepsilon$ $\forall t\geq t_0$.

Il est instable sinon.

- asymptotiquement stable si en plus $\lim_{t\to+\infty} y(t) = x_0$.

Par changement de variable, on s'intéresse à $x_0=0$.

En particulier, si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, 0 est point d'équilibre de $Y'=AY$. On a alors :

Thm 37: 0 est asymptotiquement stable pour $Y'=AY$ si et seulement si $\forall\lambda\in Sp(A)$, $Re(\lambda)<0$. Il est stable si et seulement si $\forall\lambda\in Sp(A)$, $Re(\lambda)<0$ ou $Re(\lambda)=0$ et A est diagonalisable sur l'espace propre associé.

B] Illustration du cas $Y'=AY$, $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On souhaite tracer l'allure des solutions de $Y'=AY$, $A\neq 0$.

Soit $Sp(A)=\{\lambda_1;\lambda_2\}$.

- **Cas 1 :** Si $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ et A est diagonalisable et le système se ramène à deux EDL qu'on peut résoudre (Voir Fig 1).
- **Cas 2 :** Si $\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$ et A non diagonalisable,
$$\begin{cases} t = \frac{1}{\lambda_1}\ln|x| \\ y = y_0|x| + \frac{x}{\lambda_1}\ln|x| \end{cases}$$ (Voir Fig 2)
- **Cas 3 :** $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. On peut exprimer les trajectoires en coordonnées polaires (Voir Fig 3).

C] Étude pratique dans le cas $n=2$

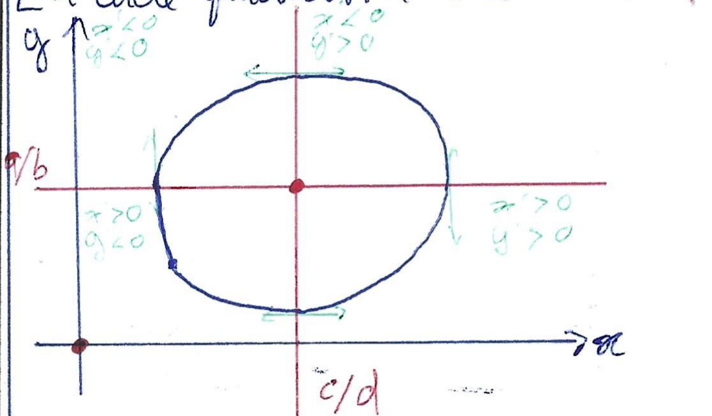
Lorsqu'on étudie un système autonome de la forme $\begin{cases} x'=f(x,y) \\ y'=g(x,y)\end{cases}$ on procède comme suit :

- On cherche les points d'équilibres
- On trace les ensembles $f(x,y)=0$ et $g(x,y)=0$
- Dans chaque région du plan, on détermine les variations de x et y pour avoir une idée de la trajectoire.

Ex 38: (DEV 3) Soit le système de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$ avec $x_0, y_0 > 0$, $a,b,c,d>0$.

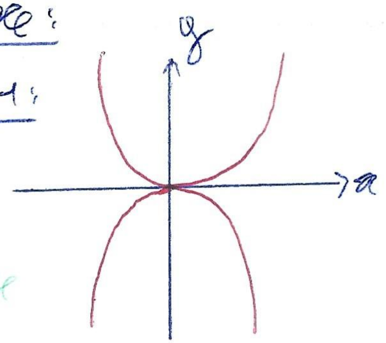
L'étude qualitative nous amène au tracé :



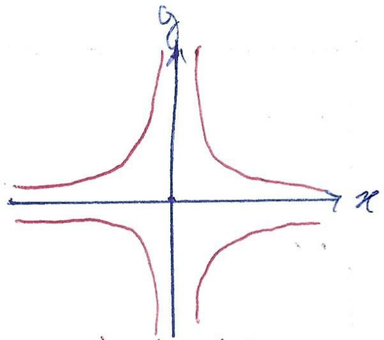
Annexe :

• **Fig 1 :**

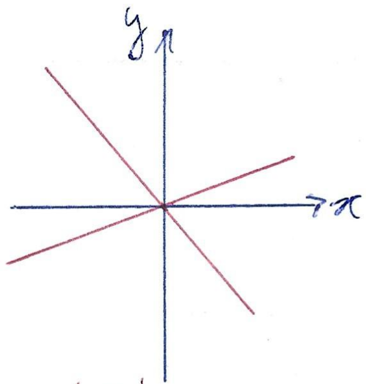
Noeud impropre



$\lambda_1 \lambda_2 > 0$
stable si $\lambda_1 < 0$
instable si $\lambda_1 > 0$

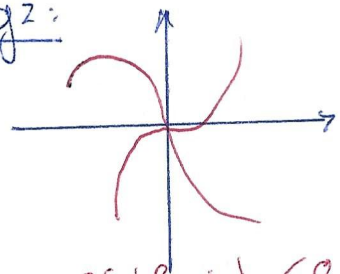


$\lambda_1 \lambda_2 < 0$
instable
Col



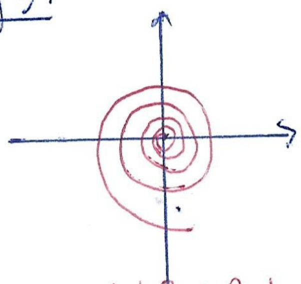
$\lambda_1 = \lambda_2$
stable si $\lambda_1 < 0$
instable sinon
Noeud propre

• **Fig 2 :**

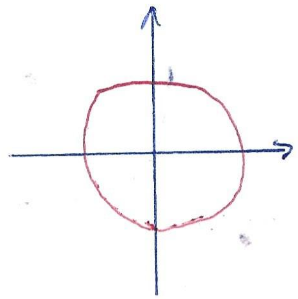


stable si $\lambda_1 < 0$
instable si $\lambda_1 > 0$
Noeud exceptionnel

• **Fig 3 :**



stable si Re $\lambda_1 < 0$
instable si Im $\lambda_1 > 0$
Foyer



centre

Références :

① Analyse, Gourdon [1]
① Eléments d'analyse Queffélec - Zuily [2]
① Equa diff et analyse numérique, Demailly [3]
① Analyse 4, FGN [4]
① Algèbre et géométrie, Rombaldi [5]