221

Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Cadre : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

I) Théorie des équations différentielles linéaires

A) Existence et unicité des solutions

[1]

Def 1 : On appelle équation différentielle linéaire sur $\mathbb{K}^n$ d'ordre p toute équation différentielle de la forme : $y^{(p)} + a_{p-1}(t)\, y^{(p-1)} + \dots + a_0(t)\, y + b(t)$ où $a_i : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$, $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$.

Rem 2 : En posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}$, on se ramène à l'équation $Y' = A(t)Y + B(t)$ où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & I_n \\ A_0(t) & \dots & & A_{p-1}(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$. On étudiera alors essentiellement les EDL d'ordre 1.

Ex 3 : Les équations $y'' - xy' + y = 0$ et $y'' + qy = 0$ où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des exemples d'EDL d'ordre 2.

[1]

Lem 4 : (de Gronwall) Soient $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $\varphi, y : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ tels que $\exists C \geq 0 / \forall t \in [a,b]$, $y(t) \leq C + \int_a^t \varphi(s) y(s)\, ds$. Alors $\forall t \in [a,b]$, $y(t) \leq C \exp\left(\int_a^t \varphi(s)\, ds\right)$.

Thm 5 : (de Cauchy-Lipschitz linéaire) Soit $Y_0 \in \mathbb{K}^n$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} Y' = A(t)Y + B \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ où $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ admet une unique solution maximale. De plus, cette solution est globale.

Rem 6 : Le caractère global de la solution maximale est garantie dans le cas linéaire contrairement au cas non linéaire, par exemple $y' = y^2$ sur $\mathbb{R}$.

App 7 : Les solutions maximales des équations de Ex 3 existent et sont globales.

B) Structure de l'espace des solutions

[1]

Thm 8 : L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de $Y' = A(t)Y$ est un espace vectoriel de dimension n.

Cor 9 : L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $Y' = A(t)Y + B(t)$ est un espace affine de direction $\mathcal{S}_H$.

Rem 10 : Ainsi, résoudre (E) $Y' = A(t)Y + B(t)$ est équivalent à trouver une base de solution de l'équation dite homogène de (E) : (E_H) $Y' = A(t)Y$ et de trouver une solution particulière de (E).

Ex 11 : Dans le cas de Def 1 pour $n = 1$, en faisant la transformation décrite en Rem 2, l'espace des solutions est de dimension p.

Def 12 : On appelle base fondamentale de (E) toute base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de solutions de (E_H). On définit leur wronskien par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $W(t) = \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$.

Rem 13 : Dans le cas de Def 1 avec $n = 1$, si $(V_1, \dots, V_p)$ est une base fondamentale, alors leur wronskien est $W(t) = \begin{vmatrix} V_1(t) & \dots & V_p(t) \\ \vdots & & \vdots \\ V_1^{(p-1)}(t) & \dots & V_p^{(p-1)}(t) \end{vmatrix}$

Prop 14 : Soient $V_1, \dots, V_n$ des solutions de (E_H). Le rang de $(V_1(t), \dots, V_n(t))$ ne dépend pas de t.

Cor 15 : $(V_1, \dots, V_n)$ est une base fondamentale si et seulement si $\exists t \in \mathbb{R} / W(t) \neq 0$.

Thm 16 : W est C^1 et $\forall t \in \mathbb{R}$, $W'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\, W(t)$.

[2]

App 17 : (DEV 1) Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique. On considère l'équation de Hill-Mathieu $y'' + qy = 0$. On étudie alors le caractère borné de ses solutions à l'aide ~~de~~ la trace d'un endomorphisme bien choisi.

II] Résolution des EDL

A] Cas des EDL à coefficients constants homogènes

On considère ici $B = 0$ et A constant.

[3] **Def 18 :** On définit $\exp(A)$ comme étant la somme de la série absolument convergente $\left(\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}\right)$.

Thm 19 : Soit $Y_0 \in \mathbb{K}^n$. L'unique solution de $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ est $t \longmapsto \exp(tA)Y_0$.

[1] **Rem 20 :** Ceci permet d'avoir une expression explicite de la solution. Cependant, en pratique, le calcul de $\exp(tA)$ peut être difficile et peut s'obtenir par exemple si on connaît la décomposition de Dunford de A.

Ex 21 : $\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$ équivaut à $Y' = AY$ où $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ or $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(1, i, -i)$ ce qui permet le calcul de $\exp(tA)$. On obtient ainsi une base fondamentale sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.

[3] **Def 22 :** Soit $(\tilde{E})$ $y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_0 y = 0$ où $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. L'équation caractéristique de $(\tilde{E})$ est $X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 = 0$.

Rem 23 : Les racines de cette équation sont les valeurs propres de la matrice donnée par Rem 2 dans le cas $n = 1$.

Lem 24 : Soit $D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, $y \longmapsto y'$ et soit

[3] $P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{r_i}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$.

Alors $\ker P(D) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(D - \lambda_i id)^{r_i}$

Thm 25 : $(t \longmapsto t^k e^{\lambda_i t})_{1 \leq i \leq r, \, 0 \leq k \leq r_i}$ forme une base fondamentale de $(\tilde{E})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

[3] **Cor 26 :** Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on suppose que les racines de P sont $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \alpha_{m+1} + i\beta_{m+1}, \alpha_{m+1} - i\beta_{m+1}, \dots, \alpha_r + i\beta_r, \alpha_r - i\beta_r$ où $\forall i \in [\![1;m]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\forall i \in [\![m+1;r]\!]$, $\beta_i \neq 0$. Alors $(t \longmapsto t^k e^{\lambda_i t})_{1 \leq i \leq m, \, 0 \leq k \leq r_i} \cup (t \longmapsto t^k e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t))_{m+1 \leq i \leq r, \, 0 \leq k \leq r_i} \cup (t \longmapsto t^k e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t))_{m+1 \leq i \leq r, \, 0 \leq k \leq r_i}$ forme une base fondamentale de $(\tilde{E})$.

[1] **App 27 :** Les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ sur $\mathbb{R}$ s'écrivent $y(t) = \lambda \cos(\omega t + \varphi)$, $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$ avec $\omega > 0$.

B] Cas général

Dans le cas non constant, on ne bénéficie pas de méthodes de calcul explicites. Cependant, si on connaît une base fondamentale, on peut trouver une solution particulière.

Def 28 : Soit, pour $i \in [\![1;n]\!]$, X_i la solution de $\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ X_i(0) = e_i \end{cases}$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. La matrice $R(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ est appelée résolvante de (EH).

Rem 29 : On a $\det(R(t)) = W(t)$ et $R'(t) = A(t)R(t)$.

[1] **Ex 30 :** Dans le cas constant, la résolvante est $R(t) = \exp(tA)$.

Prop 31 : La solution de $\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ est $t \longmapsto R(t)Y_0$.

Meth 32 : (de variation de la constante) Connaissant R, on souhaite avoir une solution particulière de $Y' = A(t)Y + B(t)$. On fait pour cela $\tilde{Y}(t) = R(t)Y_0(t)$ où Y_0 est C^1. Alors $\tilde{Y}$ est solution de (E) si et seulement si $R(t)Y_0'(t) = B(t)$. En inversant $R(t)$ et en intégrant, on trouve $\tilde{Y}$ qui convient.

Ex 33 : Dans le cas scalaire $y'' + a(t)y' + b(t)y + c(t) = 0$, si (u, v) est une base fondamentale, ceci revient à

[7] Chercher λ, μ C^1 tels que $\begin{cases} \lambda' u + \mu' v = 0 \\ \lambda' u' + \mu' v' = c(t) \end{cases}$

<u>Rem 34</u>: Dans certains cas, on peut aussi chercher des fonctions développables en série entière.

[4] <u>App 35</u>: (DEV 2) Soit $xy'' + y' + xy = 0$ l'équation de Bessel. Il existe une unique solution f DSE en 0 telle que $f(0) = 1$. De plus, si g est une solution sur $]0, \alpha[$, $\alpha > 0$ telle que (f, g) soit libre, alors g n'est pas bornée.

III) Etude qualitative d'ED2

A] Stabilité et instabilité

[5] <u>Def 36</u>: Soit $y(\cdot, \xi)$ l'unique solution maximale de $\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = \xi \end{cases}$ où $t_0 \in I$. Soit $\xi_0 \in K$.

⊛ $y(\cdot, \xi_0)$ est dit stable si $\exists \delta > 0 / \exists C > 0$, $\forall \xi \in B(\xi_0, \delta)$, $\|y(t,\xi) - y(t,\xi_0)\| \leq C \|\xi - \xi_0\|$ $\forall t \geq t_0$. Elle est dite instable sinon.

⊛ Elle est asymptotiquement stable si en plus on peut remplacer C par $\gamma : [t_0 ; +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim_{+\infty} \gamma = 0$

<u>Rem 37</u>: Cette définition se généralisent dans le cas non linéaire, où il faut cependant assurer que y soit définie sur $[t_0 ; +\infty[$.

<u>Ex 38</u>: En dimension 1, et à coefficients constants, $y(t,\xi) - y(t,\xi_0) = e^{(t-t_0)a}(\xi - \xi_0)$. On a donc la stabilité si et seulement si $Re(a) \leq 0$ et l'asymptotique stabilité si et seulement si $Re(a) < 0$.

<u>Thm 39</u>: Soient $Y' = AY$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$. Les solutions sont:

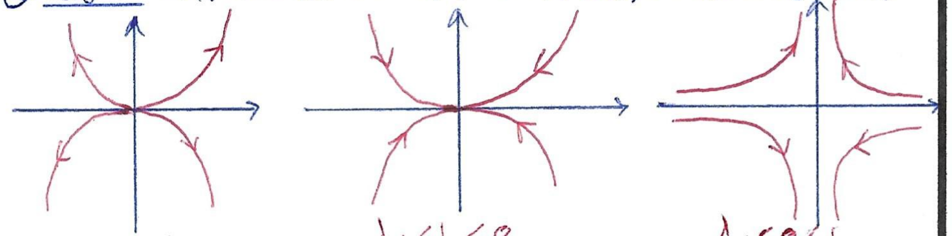
⊛ asymptotiquement stables si et seulement si $Re(\lambda_j) < 0$ $\forall j$ [5]

⊛ stables si et seulement si $Re\, \lambda_j < 0$ ou $Re(\lambda_j) = 0$ et A est diagonalisable sur l'espace propre associé.

B] Cas où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

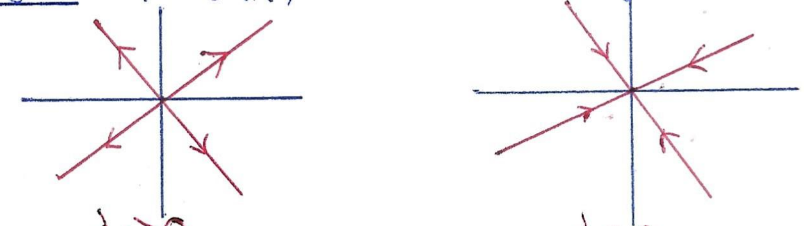
Soient λ_1, λ_2 les valeurs propres de A. On considère quatre cas où nous allons représenter l'allure des solutions:

⊛ <u>Cas 1</u>: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Alors, dans une base:



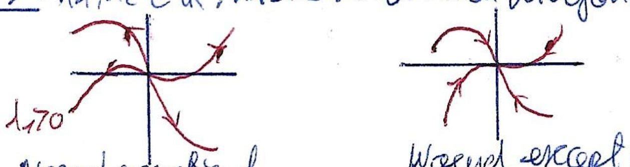
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ noeud impropre instable — $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ noeud impropre stable — $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ col instable

⊛ <u>Cas 2</u>: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ et A diagonalisable [5]



$\lambda_1 > 0$ Noeud propre instable — $\lambda_1 < 0$ Noeud propre stable.

⊛ <u>Cas 3</u>: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ et A non diagonalisable



$\lambda_1 > 0$ Noeud exceptionnel instable — $\lambda_1 < 0$ Noeud exceptionnel stable

⊛ <u>Cas 4</u>: $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$

$Re\,\lambda_1 > 0$ Foyer instable — $Re\,\lambda_1 < 0$ Foyer stable — $Re\,\lambda_1 = 0$ Centre

Références :

- Analyse, Gourdon [1]
- Éléments d'analyse, Queffélec - Zuily [2]
- Algèbre et géométrie, Rombaldi [3]
- Analyse 4, FGN [4]
- Analyse numérique et équa diff, Demailly [5]