222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

I) Phénomènes de propagation

A] Equations de transport

Def 1: Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. On considère l'équation dite de transport $\frac{\partial u}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t>0$ avec $u(0,\cdot) = u_0$ et $v : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue.

Rem 2: On retrouve ce type d'EDP dans des phénomènes de propagation, migratoire (Trafic routier, transport de particules...). [1]

Thm 3: On considère $c>0$ et $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$

L'unique solution de cette EDP est alors $(x,t) \mapsto u_0(x-ct)$.

Cor 4: La solution de ce problème est donc de même régularité que u_0.

Cor 5: Si u_0 est à support compact, alors $u(t,\cdot)$ de même pour tout $t>0$. Plus précisément, si $supp(u_0) \subset [K;M]$, $\forall t>0$, $supp(u(t,\cdot)) \subset [K+ct;M+ct]$. On dit qu'on a une propagation en temps fini.

Cor 6: L'énergie est conservée: si $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ alors $u(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|u(t,\cdot)\|_2 = \|u_0\|_2$ $\forall t>0$.

Rem 7: Dans le cas du théorème 3, u est constante sur les courbes dites caractéristiques $x-ct = \xi$ à $\xi \in \mathbb{R}$ fixé. Ceci donne:

Meth 8: (Méthode des caractéristiques) On ne suppose plus v constant. On définit les courbes caractéristiques: $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $C_\xi = \{(t;x(t)) \mid \forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = v(x(t),t), x(0) = \xi\}$

u est alors constante sur les courbes $t \mapsto (t,x(t))$

La méthode consiste alors à résoudre, si possible, $\begin{cases} x'(t) = v(x(t),t) \\ x(0) = \xi \end{cases}$ et à chercher, pour $\xi \in \mathbb{R}$, un élément $(x;t) \in C_\xi$. [1]

Ex 9: On considère $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{x}{1+t^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. On trouve $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $(\xi e^{-\mathrm{Arctan}(t)}, t) \in C_\xi$ et donc $u(x,t) = u_0(t, \exp(-\mathrm{Arctan}(t)))$.

Ex 10: Dans le cas non homogène, $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = g$, on aurait $\frac{d}{dt}u(t,x(t)) = g(t,x(t))$ soit $u(x(t),t) = u(x(0),0) + \int_0^t g(s,x(s))ds$

B] Equations des ondes

Def 11: On considère l'équation des ondes (ou de d'Alembert): $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec pour conditions initiales $u(0,\cdot) = u_0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,\cdot) = u_1$

Rem 12: On retrouve ces équations dans l'étude de propagation d'ondes à vitesse c (les ondes acoustiques par exemple) [1]

Thm 13: La solution de l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^2$ est donnée par $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)ds\right)$

Rem 14: On peut résoudre ceci à l'aide des équations de transport.

Rem 15: La solution est somme de deux ondes se propageant en sens contraire. [2]

Cor 16: On a le même phénomène de propagation en vitesse finie que Cor 5. [1]

Cor 17: On suppose que la solution u est C^1 et que u_0 et u_1 sont à support compact. Alors l'énergie totale $E(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)^2 dx$ est constante. [2]

II) Équation de la chaleur et équation de Schrödinger

A) Étude en domaine non borné

[1] **Def 18:** On considère l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

Rem 19: Ce type d'équation apparaît dans l'étude de la propagation de la chaleur dans l'espace.

[2] **Thm 20:** Si $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ et f est continue avec $\forall t \geq 0, f(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$, l'équation de la chaleur admet une unique solution $u \in C([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R})) \cap C^\infty(]0;+\infty[\times\mathbb{R})$ donnée par $u(t,x) = [u_0 * G(t,\cdot)](t,x) + \int_0^t [f(s,\cdot) * G(t-s,\cdot)](x)\,dx$ où $G(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ est le noyau de la chaleur.

Rem 21: Contrairement à l'équation de transport, on a un effet régularisant. De même, on a cette fois-ci une propagation à vitesse infinie.

Prop 22: Dans le cas $f=0$, l'énergie $E(t) = \int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2 dx$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$: on a dissipation de l'énergie.

[1] **Def 23:** On considère l'équation de Schrödinger
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,\cdot) = f \end{cases}$$

Rem 24: Cette équation apparaît en physique quantique.

Thm 25: (DEV1) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de l'équation de Schrödinger vérifiant : $\forall T>0, \forall k,l \geq 0, M_{k,l}^T := \sup_{|t|\leq T} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x,t)| < +\infty$

De plus, $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi$

[1] **Rem 26:** Contrairement à l'équation de la chaleur, l'énergie est conservée.

B) Étude en domaine borné

[1] **Def 19:** On considère l'équation de la chaleur sur un domaine borné à conditions périodiques : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ avec $\forall t>0, u(t,0) = u(t,L)$. On travaillera alors sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Rem 20: Ceci apparaît dans l'étude de la propagation de la chaleur dans une barre métallique de longueur L.

[3] **Thm 21:** (DEV2) Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. L'équation de Def 19 admet une unique solution $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ C^2 vérifiant $\|u(t,\cdot) - u_0\|_2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

[1] **Rem 22:** On retrouve à nouveau l'effet régularisant de l'équation de la chaleur.

Def 23 On considère l'équation de Schrödinger : $i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour $x \in]0;L[$, $t>0$, $u(0,x) = u_0(x)$ pour $x \in]0;L[$ et $u(t,0) = u(t,L) = 0\ \forall t>0$.

Meth 24: La méthode de séparation des variables consiste à trouver φ et ψ régulières telles que $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$ soit solution de l'EDP.

Ex 25: $u_n(x,t) = a_n \exp(-i\frac{n^2\pi^2 t}{L^2})\sin(\frac{n\pi x}{L})$ donne des solutions de l'équation de Schrödinger.

Rem 26: Contrairement à l'équation de la chaleur, on a des solutions périodiques en temps.

III) Problèmes elliptiques

On s'intéresse ici aux équations du type $-\Delta u + qu = f$ essentiellement en dimension 1 et 2.

A) Cas où q est constant

On s'intéresse au problème : $\begin{cases} -u'' + qu = f \text{ sur } [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

avec $q > 0$.

Rem 27: Bien qu'il ressemblant, ce problème n'est pas un problème de Cauchy. Cependant :

Meth 28 : (de tir) Cette méthode consiste à transformer ce problème en un problème de Cauchy. On cherche pour cela $k \in \mathbb{R}$ tel que la solution de $\begin{cases} -u''+qu=f \\ u(0)=1 \\ u'(0)=k \end{cases}$ vérifie $u(1)=0$.

Ex 29 : On considère l'équation de Poisson $\begin{cases} -u''=f \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$

Avec la méthode de tir, on trouve $k=\int_0^1\int_0^t f(y)dy\,dt$ et alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $u(x)=-\int_0^x\int_0^t f(y)dy + x\int_0^1\int_0^t f(y)dy$

Ex 30 : En résolvant le problème de Cauchy associé, pour $q>0$, on trouve $u(x)=\frac{1}{\sqrt{q}}\int_0^x sh((y-x)\sqrt{q})f(y)dy$ $-\frac{sh(x\sqrt{q})}{sh(\sqrt{q})}\int_0^1 sh((y-1)\sqrt{q})\frac{f(y)}{\sqrt{q}}dy$

B] Cas général

On considère à présent $\begin{cases} -u''(x)+q(x)u(x)=f(x), x\in[0,1] \\ u(0)=u(1)=0 \end{cases}$

Rem 31 : On peut aussi utiliser la méthode de tir ici. Cependant, la résolution peut être très difficile suivant le comportement de q.
Une façon de faire peut être d'approcher numériquement la solution :

Meth 32 : (des différences finies) On choisit un maillage à pas constant h de $[0,1]$: $(x_i)=(ih)$ pour $0\leq i\leq N+1$.
Si u est C^4, les formules de Taylor donnent :
$u''(x)=\frac{1}{h^2}(u(x+h)-2u(x)+u(x-h))+O(h^2)$

L'idée consiste à évaluer l'équation sur le maillage en remplaçant u'' par ce développement ci-dessus.

Ex 33 : On considère l'équation de Poisson $-u''=f$ avec $u(0)=u(1)=0$. Soit $U=(U_1 \dots U_N)$ dont on veut que U_i soit une bonne approximation de $u(x_i)$, $1\leq i\leq N$.
Soit $F=\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N)\end{pmatrix}$. On doit alors résoudre $AU=F$ où

$$A_h=\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Prop 34 : A_h est symétrique définie positive.
Ceci garantit l'existence et l'unicité de U.

Prop 35 : Soit $\tilde{U}=(u(x_i))_{1\leq i\leq N}$. On suppose u C^4. Alors $\|A_h\tilde{U}-F\|_\infty\leq Ch^2$ pour un certain $C>0$.

Thm 36 : $\exists C>0$, $\|U_h-\tilde{U}\|_\infty\leq Ch^2$ si u est C^4.
Ceci garantit la convergence du schéma.

Rem 37 : Ces idées se généralisent dans le cas $n=2$ pour $-\Delta u=f$. Il faut alors choisir un maillage de $[0,1]^2$ et écrire les développements de Taylor par rapport à la première et à la deuxième variable.

Rem 38 : Dans le cas où $q\neq 0$, si on note $Q_N(U)=(q(U_i))_{1\leq i\leq N}$ il faut résoudre $A_hU+Q_N(U)=F$

Ex 39 : Dans le cas où $q\equiv 1$, on obtient $\tilde{A}_hU=F$ où $\tilde{A}_h=I+A$ qui est aussi symétrique définie positive.

[2] [2] [2] [2] [2]

Références:

- Analyse numérique des EDP, Di Menza [1]
- Calcul Scientifique tome 2, Hubert & Hubbard [2]
- Calcul intégral, Candelpergher [3]