223

Suites numériques. Convergence, Valeurs d'adhérence. Ex et App.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Suites numériques : généralités [1]

A] Limite de suite

Def 1 : Soit E un ensemble non vide. On appelle suite à valeurs dans E toute application $u : \mathbb{N} \to E$. Dans le cas où $E = \mathbb{K}$, on parle de suite numérique. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n) = u_n$ et $u = (u_n)$. u_n est alors appelé terme général de u.

Def 2 : Soient $l \in \mathbb{K}$ et u une suite de $\mathbb{K}$. On dit que (u_n) converge vers l si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$.

Prop 3 : Lorsque l existe, il est unique. À ce titre, (u_n) est dite convergente de limite l. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Lorsqu'un tel l n'existe pas, u est dit divergent.

Ex 4 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Def 5 : Une suite (u_n) est dite bornée si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$

Prop 6 : Toute suite numérique convergente est bornée.

Th 7 : (de Césaro) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique convergente vers $l \in \mathbb{K}$. On définit la suite des moyennes de Césaro par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Rem 8 : La réciproque est fausse.

Def 9 : Une suite numérique est dite convergente au sens de Césaro si sa suite des moyennes de Césaro converge.

Ex 10 : $((-1)^n)_{n\geq 0}$ converge au sens de Césaro vers 0.

Def 11 : Soit u une suite numérique réelle.
- On dit que sa limite est $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq M$.
- On dit que sa limite est $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq M$.

Ex 12 : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$

B] Résultats de convergence et comparaison de suites

Prop 13 : Soit u une suite numérique et $l \in \mathbb{K}$ sa limite. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$.

Thm 14 : (d'encadrement) Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_n \leq u_n \leq w_n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Prop 15 : Soient (z_n) une suite complexe et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = Re(z_n)$, $y_n = Im(z_n)$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l + il' \in \mathbb{C}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l'$.

Def 16 : Une suite réelle est dite croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$. Elle est dite décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.

Thm 17 : (de la limite monotone) Toute suite croissante majorée est convergente.

Def 18 : Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

Thm 19 : Deux suites adjacentes convergent, et vers la même limite.

Cor 20 : (Théorème des fermés emboîtés). Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$, $[a_{n+1};b_{n+1}] \subset [a_n;b_n]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$. Alors $\exists l \in \mathbb{R}$, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n;b_n] = \{l\}$.

Def 21 : Soient (u_n) une suite numérique et (v_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On dit que :

- (v_n) domine (u_n), noté $u_n = O(v_n)$, si $\exists A \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq A v_n$
- (u_n) est négligeable devant (v_n), noté $u_n = o(v_n)$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon v_n$

Def 22 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n), noté $u_n \sim v_n$, si : $(u_n - v_n) = o(|u_n|)$

Ex 23 : $n^2 + 2n - 4 \sim n^2$

Prop 24 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Ex 24 : (Stirling) $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

+ App (DEV 1) Dev asymptotique de la série harmonique

Prop 25 : Si $u_n \sim v_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

II) Valeurs d'adhérence : conséquences sur les suites de Cauchy

A] Suites extraites [1]

Def 26 : Soit (u_n) suite numérique. On appelle suite extraite ou sous-suite de (u_n) toute suite $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. φ est appelée extractrice.

Prop 27 : Si une suite converge vers $l \in \mathbb{K}$, toute suite extraite converge aussi vers l.

Rem 28 : La réciproque est fausse.

Prop 29 : (u_n) converge vers $l \in \mathbb{K}$ si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l.

Def 30 : Soit (u_n) une suite numérique. On appelle valeur d'adhérence de (u_n) tout scalaire $l \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

Rem 31 : Une suite convergente ne possède que une valeur d'adhérence

Thm 32 : (de Bolzano-Weierstrass) Toute suite numérique bornée admet une valeur d'adhérence.

B] Limite supérieure, limite inférieure. [5]

Def 33 : Soit (u_n) une suite réelle. On appelle limite supérieure de (u_n) : $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{k \geq n} u_k$ et limite inférieure $l = \lim\limits_{n \to +\infty} \inf\limits_{k \geq n} u_k$. notées $L = \overline{\lim}\, u_n$ et $l = \underline{\lim}\, u_n$.

Prop 34 : L est la plus grande valeur d'adhérence, l est la plus petite.

Cor 35 : (u_n) converge vers $u \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $L = l = u$

C] Suites de Cauchy [1]

Def 36 : Soit (u_n) une suite numérique. (u_n) est dite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq q \geq n_0, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

Ex 37 : Toute suite numérique convergente est de Cauchy.

Prop 38 : Toute suite de Cauchy est bornée.

Lem 39 : Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence est convergente.

Thm 40 : Une suite numérique est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Rem 41 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des cas particuliers d'espaces complets.

III) Suites récurrentes et applications

A] Définitions et propriétés [6]

Def 42 : Une suite (u_n) est dite récurrente (d'ordre 1) s'il existe $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Ex 43 : Les suites arithmétiques : ($u_{n+1} = u_n + r$, $r \in \mathbb{K}$) et géométriques ($u_{n+1} = q u_n$, $q \in \mathbb{K}$) sont récurrentes.

Thm 44 : $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est continue en $x_0 \in \mathbb{K}$ si et seulement si pour toute suite (u_n) telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ on a $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$

Cor 45 : Si la suite $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ converge, alors sa limite est un point fixe de f.

Thm 46 : Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to I$.
Soit $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- Si f est croissante, (u_n) est monotone
- Si f est décroissante, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie opposée.

Ex 47 : La suite définie par $u_0 \in [0;1]$ et $u_{n+1} = u_n e^{u_n}$ converge en décroissant vers 0.

B] Suites récurrentes et points fixes [4]

Thm 48 : (du point fixe) Soit $F \subset \mathbb{K}$ fermé et $f : F \to F$ k-lipschitzienne avec $k<1$. Alors pour tout $x_0 \in F$, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers l'unique point fixe de f.

On souhaite classifier les points fixes des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in I$ un point fixe et soit $\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = f(x_n) \; \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Thm 49 : Si $|f'(a)| < 1$, il existe J un intervalle fermé centré en a stable par f tel que si $x_0 \in J$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. On parle de point fixe attractif.

Ex 50 : 1 est point fixe attractif de $x \mapsto \sqrt{x}$

Thm 51 : Si en plus f est $\mathcal{C}^2$, $f'(a) = 0$ et $f''(x) \neq 0$ $\forall x \in J$, $x_0 \in J$ et $x_0 \neq a$, alors $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et
$$x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \tfrac{1}{2} f''(a)(x_n - a)^2$$

On parle de points fixes super-attractifs.

Ex 52 : 1 est point fixe super attractif de $x \mapsto (x-1)^2 + 1$.

Thm 53 : Si $|f'(a)| > 1$, il existe un intervalle J fermé centré en a telle que si $x_0 \in J$, $x_0 \neq a$, (x_n) sort de J. On parle de point fixe répulsif.

Ex 54 : 1 est point fixe répulsif de $x \mapsto x^2$

Rem 55 : Le cas $|f'(a)| = 1$ donne lieu à différents scénarios possibles.

C] Application à la résolution d'équations [4]

Prop 56 : (Dichotomie) Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue avec $l \in [a;b]$ son unique zéro. On définit $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = b_n$ si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ sinon. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l$.

Thm 57 : (DEV 2) (Méthode de Newton) Soit $f : [c;d] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ avec $f' > 0$ et $a = f^{-1}(0)$. On pose $x_0 \in [c;d]$ et $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ où $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

- $\exists \alpha > 0$, $\forall x_0 \in]a-\alpha; a+\alpha[$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $\exists C > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2$
- Si de plus $f'' > 0$, pour tout $x_0 \geq a$, x converge en décroissant vers a et si $x_0 \neq a$, $x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$

App 58 : On peut approcher le nombre d'or via cette méthode avec $f(x) = x^2 - x - 1$.

éférences :

- Suites et séries numériques (El Amrani) [1]
- Gourdon X-ENS Analyse 2 (Francinou, Gianella, Nicolas) [2]
- Analyse numérique : une approche mathématique (Schatzman) [3]
- Le petit guide du calcul différentiel (Rouvière) [4]
- Analyse pour l'agrégation (Queffélec) [5]
- Les maths en tête : Analyse (Gourdon) [6]