226

Suites vectorielles et réelles $u_{n+1} = f(u_n)$ ...

Cadre : (E,d) désigne un espace métrique. $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Suites récurrentes : propriétés, définitions

A] Généralités

Def 1 : Soient $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. (u_n) est dite récurrente d'ordre k s'il existe $f : E^k \to E$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+k} = f(u_{n+k-1}, u_{n+k-2}, \dots, u_n)$

Rem 2 : Cette relation définit entièrement (u_n) dès que $u_0, \dots, u_{k-1}$ sont donnés dans E.

Prop 3 : Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in E$ et si f est continue en $(l, \dots, l)$, alors l vérifie $f(l, \dots, l) = l$.

Rem 4 : Si $k = 1$, l est donc un point fixe de f.

Prop 5 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. On considère la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si f est croissante, (u_n) est monotone et sa monotonie est donnée par le signe de $u_1 - u_0$.
- Si f est décroissante, $f \circ f$ est croissante. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont alors monotones de monotonies opposées.

Ex 6 : La suite (u_n) définie par $u_0 \in [-1;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$ est monotone convergente vers 0.

B] Exemples de suites récurrentes classiques

Def 7 : Soient $(u_n) \in k^{\mathbb{N}}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. (u_n) est dite récurrente linéaire d'ordre k s'il existe $a_1, \dots, a_k \in k$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i u_{n+i} \quad (*)$$

Prop 8 : L'ensemble des suites complexes satisfaisant $(*)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension k.

Def 9 : L'équation $X^k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i$ est appelée équation caractéristique associée à $(*)$.

Prop 10 : Soient $r_1, \dots, r_q$ les racines de l'équation caractéristique associée à $(*)$, de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_q$. Alors toute suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant $(*)$ est de la forme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{i=1}^{q} P_i(n) r_i^n$ où $\forall i \in [\![1;q]\!]$, $P_i \in \mathbb{C}_{\alpha_i - 1}[X]$.

Rem 11 : Les solutions réelles s'obtiennent en considérant la partie réelle de ces solutions.

App 12 : $u_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci) est de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Def-Prop 13 : $(u_n) \in k^{\mathbb{N}}$ est dite arithmétique de raison $r \in k$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

Def-Prop 14 : $(u_n) \in k^{\mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison $q \in k$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q u_n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

Def-Prop 15 : $(u_n) \in k^{\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique si $\exists a, b \in k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + b$. Si $a \neq 1$, en posant $\alpha = \frac{b}{1-a}$, $(u_n - \alpha)$ est géométrique de raison a.

Def 16 : $(u_n) \in k^{\mathbb{N}}$ est dite homographique si il existe $a, b, c, d \in k$ tels que $ad - bc \neq 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = h(u_n) \text{ avec } h(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (**)$$

Prop 17 : Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $(**)$. On considère l'équation $h(x) = x$ (E)

- Si (E) admet deux racines distinctes α et β, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ où $k = \dfrac{a - \alpha c}{a - \beta c}$
- Si (E) admet une racine double α, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{u_n - \alpha} = \dfrac{1}{u_0 - \alpha} + kn$ où $k = \dfrac{c}{a - \alpha c}$.

II) Application à la recherche de points fixes

A] Théorème du point fixe et applications

Thm 18 : (de Banach-Picard)

Si (E, d) est complet et $f : E \to E$ contractante alors f admet un unique point fixe s dans E. De plus, toute suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers s et : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - s| \leq k^n |u_0 - s|$

App 19 : (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soient $I \subset \mathbb{R}$ intervalle et U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Soit $(t_0 ; x_0) \in I \times U$. Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution.

Cor 20 : Le théorème 18 reste vrai si $\exists n \in \mathbb{N}^*$, f^n soit contractante.

B] Classification des points fixes de $\mathbb{R}$

Prop-def 21 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ un point fixe de f. Si f est dérivable en l et $|f'(l)| < 1$, alors il existe $\alpha > 0$ telle que toute suite définie par $u_0 \in]l - \alpha ; l + \alpha[$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l. l est dit point fixe attractif.

Ex 22 : $f(x) = \sqrt{x}$ avec $l = 1$

Prop-def 23 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ un point fixe de f. Si f est dérivable en l et $|f'(l)| > 1$, alors aucune suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ non stationnaire ne converge vers l. l est dit point fixe répulsif.

Ex 24 : $f(x) = x^2$ avec $l = 1$.

III) Application à la résolution approchée d'équations

A] Zéros de fonctions

Prop 25 : (Dichotomie)

Soit $f : [a ; b] \to \mathbb{R}$, $[a ; b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que f admet un unique zéro $l \in]a ; b[$ et continue. On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0$, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ sinon. Alors toute suite (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a_n ; b_n]$ converge vers l.

Prop 26 : (Méthode de Newton)

Soit $f : [c ; d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $[c ; d] \subset \mathbb{R}$. On suppose $f(c) < 0 < f(d)$ et $\forall x \in [c ; d], f'(x) > 0$. Soit a l'unique zéro de f sur $[c ; d]$ et la suite (x_n) définie par : $x_0 \in [c ; d]$, $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \varphi(x_n)$

où $\forall x \in [c;d], \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors :

* $\exists \alpha > 0, \forall x_0 \in [a-\alpha; a+\alpha], x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - a| \leq C |x_n - a|^2$
* Si de plus $\forall x \in [c;d], f''(x) > 0$, alors pour tout $x_0 \in [a;d]$, (x_n) est strictement décroissante (ou constante) et :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_{n+1} - a \leq C (x_n - a)^2 \\ \text{Si } x_0 \neq a, (x_{n+1} - a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)} (x_n - a)^2 \end{cases}$$

DEV 1

B] Résolution de système linéaire

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. On considère le système $Ax = b$ (S).

Def 27 : On appelle décomposition régulière de A toute décomposition $A = M - N$ où $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit une méthode itérative associée à cette décomposition par : $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N}, Mx_{k+1} = Nx_k + b \end{cases}$ (R)

Rem 28 : Si (x_k) converge vers $x \in \mathbb{R}^n$, alors x satisfait (S).

Def 29 : On définit le k-ème résidu par $r_k = b - Ax_k$ et le k-ème vecteur erreur par $e_k = x_k - x$.

Prop 30 : La suite (x_k) définie par (R) converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$ où ρ est le rayon spectral.

Ex 31 : Méthode de Jacobi : $M = D$ la diagonale de A, $N = D - A$

Ex 32 : Méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E$ et $N = F$ où D est la diagonale de A, $-E$ sa partie triangulaire inférieure stricte, et $-F$ sa partie supérieure stricte.

Ex 33 : Méthode du gradient à pas fixe : si $\alpha \neq 0$, on prend $M = \frac{1}{\alpha} I$, $N = \frac{1}{\alpha} I - A$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = x_k + \alpha r_k$

Lem 34 : (Inégalité de Kantorovitch)

On suppose $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_{min} = \min_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$ et $\lambda_{max} = \max_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$. Alors :

$$\forall x \neq 0, \frac{\|x\|^4}{\|x\|_A^2 \|x\|_{A^{-1}}^2} \geq 4 \frac{\lambda_{max} \lambda_{min}}{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}$$

Thm 35 : (Algorithme du gradient à pas optimal)

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $x^* = A^{-1} b$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) = \frac{1}{2} \|x\|_A^2 - {}^t x b$ et on définit (x_k) par :

$$\begin{cases} x_0 \neq x^* \\ \alpha_k = \frac{\|\nabla \phi(x_k)\|^2}{\|\nabla \phi(x_k)\|_A^2} \text{ si } x_k \neq x^*, 0 \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla \phi(x_k) \end{cases}$$

Alors $\lim_{k \to +\infty} x_k = x^*$. De plus :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|x_{k+1} - x^*\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \left(\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \right)^{k+1} \|x_0 - x^*\|$$

DEV 2