Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

228

I) Notions de continuité et de dérivation

A] Fonctions réelles continues

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$

Def 1: f est continue en $a \in I$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ex 2: Les fonctions polynomiales sont continues.

Prop 3: Toute somme, produit et composée de fonctions continues est continue. Si la fonction par laquelle on divise est continue et ne s'annule pas, il en est de même pour les quotients.

Def 4: Soit $a \in I$. f est continue à gauche en a si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. On définit de même la continuité à droite.

Thm 5: f est continue en $a \in \mathring{I}$ si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

Ex 6: $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ n'est pas continue en 0.

Thm 7: f est continue en $a \in I$ si et seulement si $\forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \Rightarrow f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(a)$

Ex 8: $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point.

App 9: Si $f(I) \subset I$, soit $\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = f(x_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Si (x_n) converge, sa limite est un point fixe de f.

Soit $I = [a;b]$, un compact de $\mathbb{R}$.

Thm 10: Si f est continue sur I, f est bornée et atteint ses bornes.

Thm 11: (de Heine) f est continue sur I si et seulement si elle est uniformément continue: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,y \in I, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

App 12: Toute fonction continue sur I est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

B] Fonctions dérivables

Def 13: f est dérivable en $a \in \mathring{I}$ si la quantité $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans $\mathbb{R}$. C'est la dérivée de f en a. On définit de même la dérivée à droite et à gauche.

Prop 14: Si f est dérivable en $a \in \mathring{I}$, alors f est continue en a.

Rem 15: La réciproque est fausse: $x \mapsto |x|$.

Prop 16: Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en a.

- $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- Si $g(a)g'(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$
- Si $g(I) \subset I$, $f \circ g$ est dérivable en a et $(f \circ g)'(a) = g'(a) f'(g(a))$

Def 17: On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ la dérivée n fois de f. On dit que f est de classe C^n si elle est n fois dérivable et $f^{(n)}$ continue. Elle est de classe C^∞ si elle est C^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Rem 18: On peut énoncer une version C^n de Prop 16.

Thm 19: (Formule de Leibniz) Si f, g sont C^n sur I, alors fg de même et $\forall x \in \mathring{I}, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$

Thm 20: Si f est strictement monotone sur I et dérivable en $a \in \mathring{I}$ avec $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

Ex 21: $\forall x \in]-1;1[$, $\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

II) Théorèmes fondamentaux

A] Théorème des valeurs intermédiaires

Prop 22: Si f est continue, f(I) est un intervalle.

Thm 23 : (des valeurs intermédiaires) Si f est continue, elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires : pour tout $a<b \in I$, $f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists \alpha \in]a;b[, f(\alpha)=0$ [1]

Ex 24 : L'équation $e^{x}=x$ admet une solution dans $\mathbb{R}_+$.

Thm 25 : (de Darboux) Si f est dérivable sur I, f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. [1]

App 26 : Les fonctions en escaliers n'admettent pas de primitive.

B] Théorème de Rolle et conséquences

Soit $I=[a,b]$.

Prop 27 : Si f est dérivable sur $]a;b[$ et admet un extremum local en $\alpha \in]a;b[$ alors $f'(\alpha)=0$

Thm 28 : (de Rolle) Si f est continue sur I, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a)=f(b)$ alors $\exists c \in]a;b[$, $f'(c)=0$.

Cor 29 : Si f est C^n sur I et s'annule en $n+1$ points distincts, $\exists c \in \mathring{I}$, $f^{(n)}(c)=0$. [7]

App 30 : Si f C^{n+1}, soit $L_n(f)$ le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0,\dots,x_n$, si $\Pi_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ $\forall x \in I$ $\exists C_x \in I$, $f(x)-L_n(f)(x)=\frac{1}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x)f^{(n+1)}(C_x)$.

Thm 31 : (des accroissements finis) Si f est continue sur I et dérivable sur $]a;b[$, $\exists c \in]a;b[$, $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

App 32 : Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est C^1, f est lipschitzienne si et seulement si elle est bornée.

App 33 : f est croissante sur $\mathring{I}$ si et seulement si $f'_{|\mathring{I}} \geq 0$.

App 34 : Si f est continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{\alpha\}$, $\alpha \in]a;b[$ mais admet une même dérivée à droite et à gauche de α, f se prolonge en une application dérivable en α. [1]

Ex 35 : $x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-\frac{1}{x^2}}$ se prolonge de façon C^∞ sur $\mathbb{R}$. [1]

C] Formules de Taylor

Thm 36 : (Formule de Taylor-Young) Si f est dérivable n fois en $a \in \mathring{I}$, $\forall x \in I$, $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o_a((x-a)^n)$ [1]

Rem 37 : Ceci permet de mieux comprendre l'allure locale de f.

Thm 38 : (Formule de Taylor-Lagrange) Soit f C^{n+1} sur $]a;b[$. Alors $\exists c \in]a;b[$ / $f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

> App 39 : (DEV 1) (Méthode de Newton) Soit $f:[c;d]\to\mathbb{R}$ C^2 avec $f'>0$, $f(c)<0<f(d)$, $f(a)=0$ et $\phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$.
> - $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ / $\forall x_0 \in [a-\alpha;a+\alpha]$, la suite définie par $x_{n+1}=\phi(x_n)$ converge quadratiquement vers a.
> - Si $f''>0$, on a cette convergence quel que soit x_0 et $x_{n+1}-a \sim_{+\infty} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n-a)^2$ pour $x_0>a$. [4]

Thm 40 : (Formule de Taylor avec reste intégral) Si f est C^{n+1} sur $[a;b]$, $f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt$ [1]

Rem 41 : Ces formules sont utiles pour prouver que certaines fonctions sont égales à leur somme de Taylor.

III] Stabilité des notions de continuité et de dérivabilité

A] Suites de fonctions

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur I.

Thm 42 : Si (f_n) converge uniformément vers f et que f_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est continue. [2]

Rem 43 : La convergence simple ne suffit pas à transférer la continuité : $x \mapsto x^n$ sur $[0;1]$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$.

Cor 44 : On a la même conclusion si $(\sum f_n)$ converge uniformément.

Thm 45 : On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $[a;b]$.

① $\exists x_0 \in [a;b]$ / $(f_n(x_0))$ converge

② (f_n') converge uniformément vers g.

Alors, (f_n) converge uniformément vers f dérivable telle que $f' = g$.

App 46 : Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière de rayon R. Alors sa somme est C^∞ sur $]-R;R[$ et on peut dériver sous le signe somme.

Thm 47 : (DEV2) (De Weierstrass) Soient $[a;b] \subset \mathbb{R}$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe une suite de polynômes sur $[a;b]$ qui converge uniformément vers f.

B] Intégrales à paramètre

Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Thm 48 : Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot,x)$ est continue par morceaux, $\forall t \in I$, $f(t,\cdot)$ est continue et $\exists h \in L^1(I)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in I$, $|f(x,t)| \leq h(x)$ alors $F(x) := \int_I f(t;x)\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Thm 49 : Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot,x)$ est continue par morceaux et intégrable, si $\forall t \in I$, $f(t,\cdot)$ est dérivable de dérivée dominée par une fonction de $L^1(I)$, alors F est dérivable et $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t;x)\,dt$

Rem 50 : Les hypothèses de domination peuvent se faire sur tout compact

App 51 : La fonction : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV) Dérivation faible

On souhaite ici généraliser la dérivation.

A] Distributions

Def 52 : Le support de f est $\operatorname{Supp}(f) = \overline{\{x \in I \mid f(x) \neq 0\}}$.

On note $\mathcal{D}(I)$ les fonctions C^∞ à support compact.

On appelle distribution toute application linéaire $T : \mathcal{D}(I) \to \mathbb{R}$ telle que pour tout compact K, $\exists C > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\operatorname{Supp} \varphi \subset K \Rightarrow |T(\varphi)| \leq C \sup_{0 \leq k \leq m} \|\varphi^{(k)}\|_\infty$

Ex 53 : Les fonctions f localement intégrables (par exemple continues) définissent une distribution : $T_f(\varphi) = \int_I f(t)\varphi(t)\,dt$

Prop 54 : Si $f, g \in L^1_{loc}(I)$, $T_f = T_g \Leftrightarrow f = g$ presque partout.

B] Dérivation faible ; lien avec la dérivée forte

Def 55 : Soit T une distribution. On définit sa distribution dérivée par $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, $T'(\varphi) = -T(\varphi')$. On dit que $f \in L^1_{loc}(I)$ admet une dérivée faible si $\exists g \in L^1_{loc}$, $T_f' = T_g$. En particulier, si elle existe, elle est unique à égalité presque partout près.

Ex 56 : $f : x \mapsto |x|$ admet une dérivée faible sur $\mathbb{R}$ qui est $2\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} - 1$ et $T_f'' = 2\delta_0$.

Thm 57 : Si $f \in C^1(I)$, $T_f' = T_{f'}$. En particulier, dérivées faibles et fortes coïncident.

Thm 58 : (Formule des sauts) On suppose que I est ouvert et qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in I$ tels que f est C^1 sur $I \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ de dérivée $f' \in L^1_{loc}(I)$ et que f admet des limites à droite et à gauche en tout point. Alors :

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n} (f(x_k^+) - f(x_k^-))\,\delta_{x_k}$$

Références :

1. Éléments d'analyse réelle, Rombaldi [1]
2. Analyse, Gourdon [2]
3. Éléments d'analyse fonctionnelle, Hirsch-Lacombe [3]
4. Petit guide de calcul différentiel, Rouvière [4]