229

Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I] Fonctions monotones

A] Définitions et premières propriétés

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.

Def 1: f est dite croissante (resp. décroissante) si $\forall x, y \in I$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$). f est dite monotone si elle vérifie l'une de ces propriétés. La monotonie est stricte si l'inégalité est stricte dès que $x < y$.

Ex 2: $x \mapsto x^2$ est décroissante strictement sur $\mathbb{R}_-$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Prop 3: La monotonie est conservée par somme et par multiplication par un scalaire positif. Elle est préservée par produit si les fonctions considérées sont positives, et par composition dans le cas croissant.

Thm 4: Si f est strictement monotone, c'est une bijection de I sur $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque est elle aussi strictement monotone de même sens de variation que f. [1]

Ex 5: $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on note alors $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

B] Limites et continuité

Lem 6: Si $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f croissante alors $\inf_I f = \lim_{x \to a^+} f(x)$ et $\sup_I f = \lim_{x \to b^-} f(x)$ [1]

Thm 7: Si f est continue strictement monotone, sa bijection réciproque est elle aussi continue.

Ex 8: $x \mapsto \sqrt{x}$ et $\ln$ sont continues.

Thm 9: Si f est monotone, elle admet des limites à droite et à gauche en tout point de $\mathring{I}$.

Cor 10: Dans ce cas, l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable.

Cor 11: Si f est monotone et que $f(I)$ est un intervalle alors f est continue.

Rem 12: Sans hypothèse de monotonie, cela ne tient plus.

Thm 13: Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, elle est injective si et seulement si elle est strictement monotone. [1]

C] Fonctions dérivables monotones

Thm 14: On suppose que I est ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$. [1]

Rem 15: Ceci donne un moyen puissant pour connaître les variations d'une fonction.

App 16: (DEV 1) On considère le système de Lotka-Volterra sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$
Alors, en observant la monotonie de x et y, on peut prédire la trajectoire des solutions maximales. [2]

Ex 17: Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Thm 18: (Admis) Toute fonction monotone sur I est dérivable presque partout.

II] Fonctions convexes

A] Définitions et premières propriétés

Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Def 19: Soit $f : C \to \mathbb{R}$. f est dit convexe si : [1]

$\forall x, y \in C, \forall t \in [0;1], f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$ [1]
Elle est strictement convexe si l'inégalité est stricte dès que $x \neq y$. Elle est dite concave si $(-f)$ est convexe.

Rem 20 : Pour $C = \mathbb{R}$, ceci revient à regarder si f est en dessous ou au-dessus de ses cordes (Voir Fig 1).

Ex 21 : Toute norme sur un espace vectoriel est convexe.

Prop 22 : Une combinaison linéaire positive de fonctions convexes est convexe.

Rem 23 : $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -1$ sont convexes, cependant leur produit ne l'est pas.

B] Caractérisation des fonctions convexes

Thm 24 : Soit $Epi(f) = \{(x; f(x)) \mid x \in C\}$. f est convexe si et seulement si $Epi(f)$ est une partie convexe de C.

On suppose C ouvert et f différentiable sur C.

Thm 25 : Les propositions suivantes sont équivalentes : [1]

- f est convexe
- $\forall x, y \in C$, $f(x) \geq f(y) + df_y(x-y)$
- $\forall x, y \in C$, $df_x(x-y) \geq df_y(x-y)$

Rem 26 : On a la même proposition pour le cas strictement convexe, en remplaçant par des inégalités strictes dès que $x \neq y$.

Thm 27 : Si f est deux fois différentiable, f est convexe si et seulement si $\forall x, y \in C$, $d^2f_x(y, y) \geq 0$ et de même strictement.

C] Cas de la dimension 1 et régularité

On suppose ici que $C = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Thm 28 : Si f est convexe sur I, alors elle est lipschitzienne sur tout $[a;b] \subset \mathring{I}$.

Cor 29 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe alors elle est continue sur $\mathring{I}$.

Rem 30 : On peut ne pas avoir la continuité au bord.

Lem 31 : f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$,
$\tau_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante.

App 32 : f est convexe et concave si et seulement si elle est affine.

Thm 33 : (inégalité des trois pentes) Pour $a \neq b \in I$, soit $p(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ la pente de la droite passant par $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$. f est convexe si et seulement si pour tout $x < y < z$, $p(x;y) \leq p(x;z) \leq p(y;z)$ (Fig 2) [1]

Cor 33 : Si f est convexe, elle admet des dérivées $f_g'(a)$ à gauche et $f_d'(a)$ à droite pour tout $a \in \mathring{I}$. De plus, f_g' et f_d' sont croissantes sur $\mathring{I}$.

Cor 34 : Si I est ouvert et f dérivable alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Rem 35 : On a de même que f est concave si et seulement si f' est décroissante, et de même strictement.

App 36 : $\exp$ est convexe, $\ln$ est concave. [3]

App 37 : La fonction Γ d'Euler définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est convexe.

III] Applications en analyse

A] Etude de suites récurrentes et de séries

On s'intéresse aux suites réelles définies par une de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in I$ (R)

[3] **Thm 38** : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ tel que $f(I)$.

- Si f est croissante, (u_n) est monotone
- Si f est décroissante, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies opposées.

App 39 : La suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \sin(u_n) \\ u_0 \in [0;1] \end{cases}$ converge vers 0.

[5] **Thm 40** : (Méthode de Newton) Soit $f : [c;d] \to \mathbb{R}$ C^2 et $a \in [c;d]$, $f(a) = 0$. Si $f' > 0$, soit $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $x \in [c;d]$.

- Il existe $\alpha > 0$ tel que $\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n) \\ x_0 \in [a-\alpha ; a+\alpha] \end{cases}$ converge quadratiquement vers a.
- Si f est strictement convexe, elle converge quel que soit $x_0 \in [c;d]$ et $x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$, $x_0 > a$.

La monotonie intervient aussi dans l'étude de certaines séries.

[3] **Thm 41** : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ positive continue et décroissante. Alors $(\sum f(n))$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de mêmes natures.

App 42 : Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors $\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*$, $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

B] Inégalités de convexité

Les fonctions convexes peuvent donner des inégalités intéressantes.

[3] **Prop 43** : (Inégalité de Young) Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $\forall x, y > 0$, $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$

Cor 44 : (Inégalité de Hölder) Soit $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p\right)^{1/p}$. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $p, q > 1$ alors $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\forall g \in L^q(\mathbb{R})$, $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

App 45 : $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

C] Optimisation convexe et méthode du gradient

On souhaite minimiser $J : C \to \mathbb{R}$ où $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe.

[2] **Thm 46** : (Inégalité d'Euler) Si J est C^1 et convexe, alors $u \in C$ est minimum si et seulement si $\forall v \in C$, $\langle \nabla J(u), v - u \rangle \geq 0$. Si la convexité est stricte, le minimum est unique.

Rem 47 : Si $u \in \mathring{C}$, ceci devient l'équation d'Euler : $\nabla J(u) = 0$.

Ex 48 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, pour $b \in \mathbb{R}^n$, $J : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ est strictement convexe. Son minimum existe et ne peut être que la solution de $Ax = b$.

[5] **Lem 49** : (DEV 2) (Kantorovitch) Soient $\lambda_{max} = \max_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$, $\lambda_{min} = \min_{\lambda \in Sp(A)} \lambda$. Alors $\forall x \neq 0$,

$$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_A^2 \|x\|_{A^{-1}}^2} \geq 4 \frac{\lambda_{max}\lambda_{min}}{(\lambda_{max} + \lambda_{min})^2}$$

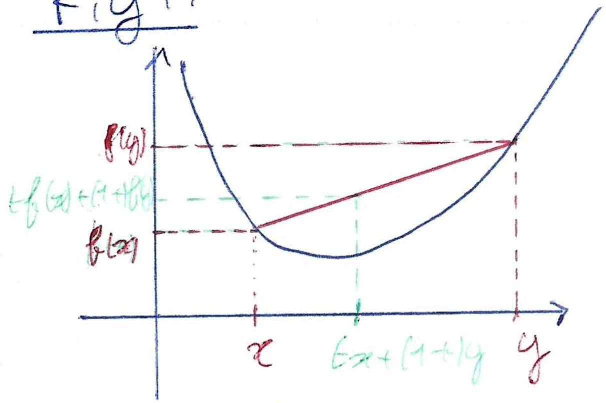
Thm 50 : (Algorithme du gradient à pas optimal) Soient $x^* = A^{-1}b$ et : $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k \text{ si } \nabla J(x_k) = 0 \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla J(x_k) \text{ si } \nabla J(x_k) \neq 0 \end{cases}$

où $\alpha_k = \underset{\rho > 0}{\operatorname{argmin}}\, J(x_k - \rho \nabla J(x_k))$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|x_k - x^*\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \left(\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}\right)^k \|x_0 - x^*\|$

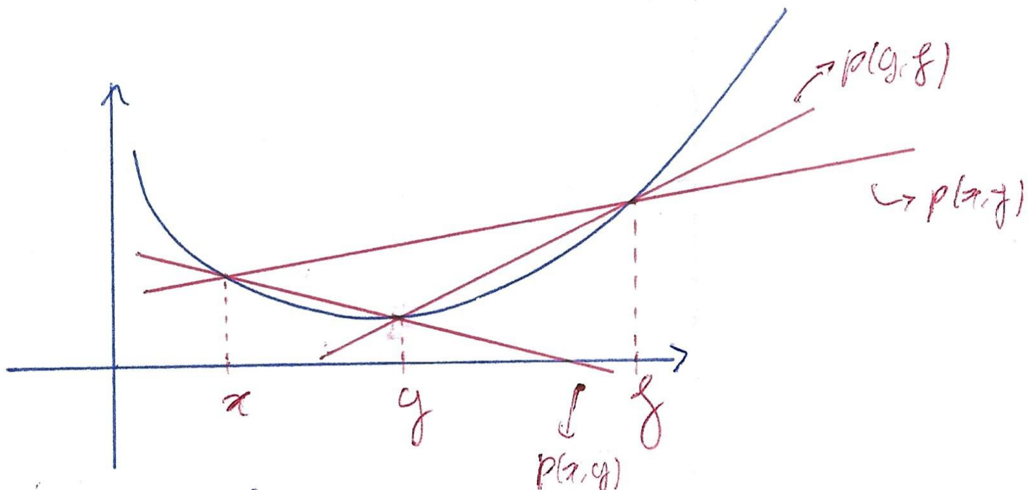
[4] **Rem 51** : Dans le cas général, on peut prouver que cet algorithme converge si J' est lipschitzienne et α-convexe : $\forall u, v \in C$, $|J(u) - J(v)| \geq \frac{\alpha}{2}\|u - v\|^2$.

Fig 1 :



Convexité

Fig 2 :



Inégalité des trois pentes

Références :

- Eléments d'analyse réelle, Rombaldi [1]
- Analyse 4, FGN [2]
- Analyse, Gourdon [3]
- Analyse numérique et optimisation [4]
- Développements d'analyse, Fermis [5]