230

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Cadre : On se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Généralités et convergences de suites numériques [1]

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

A] Séries numériques convergentes et restes

Def 1 : On appelle série numérique de terme général u_n la suite (S_N) définie par : $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$. On la note $(\sum u_n)$. Elle est dite convergente de somme $S \in \mathbb{K}$ si $\lim_{N \to +\infty} S_N = S$. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$. $R_n = S - S_n$ est appelé reste d'ordre n de $(\sum u_n)$

Ex 2 : Pour $q \in \mathbb{C}$, $(\sum q^n)$ est appelée série géométrique. Elle converge si et seulement si $|q|<1$, et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Prop 3 : $(\sum u_n)$ converge si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$

Prop 4 : Si $(\sum u_n)$ converge alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Rem 5 : La réciproque est fausse.

Def 6 : On dit que $(\sum u_n)$ diverge grossièrement si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

Prop 7 : On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de terme.

Thm 8 : (Correspondance bijective suite-série) (u_n) converge si et seulement si la série numérique $(\sum u_{n+1} - u_n)$ converge.

Ex 9 : $(\sum \frac{1}{n(n+1)})$ converge.

B] Critère de Cauchy et convergence absolue

Thm 10 : (critère de Cauchy) $(\sum u_n)$ converge si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \varepsilon$$

Ex 11 : $(\sum \frac{1}{n})$ ne satisfait pas le critère de Cauchy, donc elle est divergente.

Def 12 : $(\sum u_n)$ converge absolument si $(\sum |u_n|)$ converge.

Prop 13 : Toute série numérique absolument convergente est convergente.

Rem 14 : La réciproque est fausse.

Def 15 : $(\sum u_n)$ est dite semi-convergente si elle converge mais que $(\sum |u_n|)$ diverge.

C] Produit de Cauchy de deux séries numériques

Soit $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Def 16 : On appelle série produit de $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ la série terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Thm 17 : (de Mertens) Si $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ convergent et que l'une d'elle converge absolument alors $(\sum w_n)$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Rem 18 : Si les deux convergent absolument, alors $(\sum w_n)$ converge absolument elle aussi.

II) Critères de convergence et comportements asymptotiques [1]

A] Cas des séries positives

On suppose ici que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$ et $v_n \in \mathbb{R}_+$.

Lem 19 : $(\sum u_n)$ converge si et seulement si (S_n) est bornée. Sinon, $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Thm 20 : (de comparaison) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors : Si $(\sum v_n)$ converge, $(\sum u_n)$ converge.

Rem 21 : Par contraposée, si $(\sum u_n)$ diverge, alors $(\sum v_n)$ diverge

Ex 22 : $(\sum \frac{1}{n^2})$ converge, par comparaison avec $\frac{1}{n(n+1)}$.

Thm 23 : (Règle d'équivalence) Si $u_n \sim v_n$, alors $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, les restes sont équivalents. Sinon ce sont les sommes partielles.

Thm 24 : Si $u_n = o(v_n)$ (ou $u_n = O(v_n)$) et que $(\sum v_n)$ converge, alors $(\sum u_n)$ converge. De plus, si on note ℓ_n le n-ème reste de $(\sum v_n)$, alors $R_n = o(\ell_n)$ (ou $R_n = O(\ell_n)$).

Rem 25 : Si $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, ce critère reste vrai en considérant $|u_n|$.

Thm 26 : (Comparaison série-intégrale). Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ positive décroissante. Alors $(\sum f(n))_{n \geq a}$ et l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$

App 27 : $(\sum \frac{1}{n^\alpha})$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (série de Riemann)

[3] App 28 : Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ appelée constante d'Euler telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. De plus, si on pose $k_n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid H_k \geq n\}$, alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = e$. DEV 1

Ex 29 : On peut estimer la constante d'Apéry à 10^{-5} près : $\zeta(3) \simeq 1,20205$.

B] Séries quelconques, séries alternées

Ici, $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est quelconque.

Thm 30 : (Règle de Cauchy) Soit $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $L < 1$, $(\sum u_n)$ converge absolument. Si $L > 1$, $(\sum u_n)$ diverge grossièrement. Dans le cas convergent, il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que $|R_n| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ pour n grand.

Ex 31 : $(\sum (1-\frac{1}{n})^{n^2})$ converge absolument.

Thm 32 : (Règle de d'Alembert) On suppose que $\lambda = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. Si $\lambda < 1$, $(\sum u_n)$ converge absolument. Si $\lambda > 1$, $(\sum u_n)$ est divergente grossièrement. De plus, si $\lambda < 1$, il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que $|R_n| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|u_n|$ pour n grand.

Ex 33 : Pour $a > 0$, $(\sum \frac{a^n}{n})$ converge si $a < 1$, et diverge si $a > 1$.

Thm 33 : (Critère spécial des séries alternées) Soit (a_n) une suite réelle positive décroissante de limite nulle. Alors $(\sum (-1)^n a_n)$ est convergente. De plus, sa somme S vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq a_{n+1}$.

Ex 34 : $(\sum \frac{(-1)^n}{n})$ est semi-convergente.

Thm 35 : (Critère d'Abel). Si $u_n = a_n b_n$ avec (a_n) une suite de réels positifs décroissante de limite nulle et $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| < M$. Alors $(\sum u_n)$ converge.

Ex 36 : $\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $(\sum a_n \cos(n\theta))$ et $(\sum a_n \sin(n\theta))$ convergent.

C] Permutation des termes

Def 37 : $(\sum u_n)$ est dite commutativement convergente si pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(\sum u_{\sigma(n)})$ converge.

Thm 38 : Toute série absolument convergente est commutativement convergente et de même somme.

Rem 39 : La réciproque est vraie.

Thm 40 : (de réarrangement de Riemann) On suppose $(\sum u_n)$ semi-convergente. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$. DEV 2 [3]

III) Application aux séries entières [2]

A] Disque et rayon de convergence

Def 41 : On appelle série entière toute série de fonction $(\sum a_n z^n)$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Lem 42 : (Abel) Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière. On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que $(a_n z_0^n)$ est bornée dans $\mathbb{C}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ telle que $|z| < |z_0|$, $(\sum a_n z^n)$ converge absolument.

Def 43 : On appelle rayon de convergence de $(\sum a_n z^n)$ le nombre de $\overline{\mathbb{R}_+}$: $R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$.
Si $R < +\infty$, $D(0,R)$ est appelé disque de convergence.

Cor 44 : Soit $(\sum a_n z^n)$ de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $|z| < R$, alors $(\sum a_n z^n)$ converge absolument. Si $|z| > R$, $(\sum a_n z^n)$ diverge.

Rem 45 : Sur le cercle $|z| = R$, tout peut arriver

B] Calcul pratique du rayon de convergence

Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière.

Prop 46 : Soit $\lambda = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0 ; +\infty]$. Alors $R = \frac{1}{\lambda}$ avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Ex 47 : On introduit la série exponentielle $(\sum \frac{z^n}{n!})$. Cette série a un rayon de convergence infini.

Thm 47 : (Règle d'Hadamard) On a l'égalité :
$$\frac{1}{R} = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$$

C] Somme et produit de séries entières

Soient $(\sum a_n z^n)$ et $(\sum b_n z^n)$ deux séries entières de rayons R et R'

Prop 48 : Le rayon de convergence R'' de $(\sum (a_n + b_n) z^n)$ vérifie $R'' \geq \min(R, R')$

Prop 49 : (produit de Cauchy). Soit c_n le terme général de la série des produits de Cauchy de $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$. Alors le rayon R'' de $(\sum c_n z^n)$ vérifie $R'' \geq \min(R, R')$. De plus, si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < \min(R, R')$, alors :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

App 50 : D'après 47, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est défini $\forall z \in \mathbb{C}$.
On a donc par produit de Cauchy : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

Références :

- Suites et séries numériques (El Amrani) [1]
- Les maths en tête : Analyse (Gourdon) [2]
- Oraux X-ENS Analyse 1 (Francinou) [3]