

Analyse numérique matricielle. Résolution approchée de systèmes linéaires. Recherche d'algorithmes propres: exemples.

Cadre: On se place sur $M_n(K)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I) Outils matriciels, conditionnement [1]

A) Normes, normes matricielles

Def 1: Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_n(K)$. On dit que $\|\cdot\|$ est une norme matricielle (ou d'algèbre) si: $\forall A, B \in M_n(K)$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Ex 2: On définit la norme de Frobenius par: $\forall A \in M_n(K)$, $\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \text{Tr}(A^*A)^{1/2}$. (c'est une norme matricielle)

Def 3: Soit $\|\cdot\|$ une norme sur K^m . On définit une nouvelle norme sur $M_n(K)$ toujours notée $\|\cdot\|$ appelée norme subordonnée par: $\forall A \in M_n(K)$, $\|A\| = \sup_{\substack{V \in K^n \\ \|V\|=1}} \|AV\| = \sup_{\substack{V \in K^n \\ \|V\|=1}} \|AV\|$

Ex 4: La norme $\|\cdot\|$ est subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_\infty$ est subordonnée. De plus: $\forall A \in M_n(K)$, $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Rem 5: $\|\cdot\|_1$ est une norme subordonnée sur $M_n(K)$, alors $\|I_n\| = 1$. La norme de Frobenius n'est donc subordonnée à aucune norme.

Thm 6: Toute norme subordonnée est une norme matricielle

Def 7: Soit $A \in M_n(K)$. On appelle rayon spectral de A la quantité: $\rho(A) = \max \{ |a| \mid a \in \text{Sp}(A) \}$.

Thm 8: $\forall A \in M_n(K)$, $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$

Thm 9: (de Hauschölder) Soit $\|\cdot\|$ une norme subordonnée sur $M_n(K)$. Alors $\forall A \in M_n(K)$, $\rho(A) \leq \|A\|$. Réciproquement pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $A \in M_n(K)$, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|_{A,\epsilon}$ telle que $\|A\|_{A,\epsilon} \leq \rho(A) + \epsilon$

B) Conditionnement d'une matrice

Def 10: Soit $\|\cdot\|$ une norme subordonnée sur $M_n(K)$. On appelle conditionnement relatif à $\|\cdot\|$ la quantité: $\forall A \in GL_n(K)$, $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Prop 11: Soient $A \in GL_n(K)$, $b \in K^n$ et $x \in K^n$ tels que $Ax = b$. Soient $\delta x, \delta b \in K^n$ tels que $A(x + \delta x) = b + \delta b$. On a alors l'estimation: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ ou cond est le

conditionnement relatif à la norme subordonnée et la norme vectorielle $\|\cdot\|$ sur K^n .

Rem 12: cond mesure alors la sensibilité du système aux petites variations.

Def 13: $A \in GL_n(K)$ est dite bien conditionnée si $\text{cond}(A)$ est proche de 1. Sinon, elle est dite mal conditionnée.

Prop 14: $\forall A \in GL_n(K)$, $\forall \alpha \in K^*$, $\text{cond}(A^{-1}) = \text{cond}(A)$, $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$, $\text{cond}(A) > 1$ et $\text{cond}(I_n) = 1$.

Prop 15: Soit cond_2 le conditionnement relatif à $\|\cdot\|_2$. Soit $A \in M_n(K)$ une matrice hermitienne. Alors $\|A\|_2 = \rho(A)$. De plus, si $A \in GL_n(K)$, si on note λ_{\min} et λ_{\max} respectivement les valeurs propres de plus petit et grand module, alors:

$$\text{cond}_2(A) = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$$

Def 16: Si un système $Ax = b$ est mal conditionné, on appelle préconditionnement toute méthode V isant à trouver $P \in GL_n(K)$ tel que $PAx = Pb$ est bien conditionné. P doit donc être "proche" de A^{-1} .

Rem 17: Il n'existe pas de méthode standard pour trouver P .

[1]

I) Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

A) Méthode de Gauss et factorisation LU

Def 19: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle sous-matrice principale d'ordre $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$.

Thm 19: Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. On suppose que toutes ses sous-matrices principales sont inversibles. Alors il existe un unique couple de matrices $(L; U) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})^2$, L triangulaire inférieure à diagonale unité, U triangulaire supérieure tels que $A = LU$. C'est la factorisation LU de A .

Rem 20: Ceci s'obtient par la méthode de Gauss qui consiste à triangulariser A , c'est un système, en $O\left(\frac{2n^3}{3}\right)$ opérations, sans réserve que les pivots soient non nuls.

Cor 21: Toute matrice définie positive admet une factorisation LU.

Ex 22: Dans le cas où A est tridiagonale, L est bidiagonale inférieure et U est bidiagonale supérieure.

Thm 23: Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice de permutation P tel que PA admette une factorisation LU.

Rem 24: P s'obtient essentiellement en permutant les lignes de la matrice de sorte qu'à chaque étape, le pivot de la méthode de Gauss soit le plus grand possible.

B) Factorisation de Cholesky

Thm 25: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ hermitienne définie positive. Alors, il existe $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telle que $A = RR^*$. De plus, si on impose que la diagonale de R soit positive, cette décomposition est unique.

Rem 26: En pratique, on écrit la forme générale de R

et on procède par identification.

Ex 27: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, on trouve $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

II) Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

A) Méthode générale

On se donne $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}^n$. On souhaite résoudre $Ax = b$.

Def 28: On appelle décomposition régulière de A toute écriture $A = M - N$ où $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit alors une suite: $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{K}^n \\ \forall k \in \mathbb{N}, Mx_{k+1} = Nx_k + b \end{cases} (*)$

Cette méthode est dite convergente si (x_k) converge quel que soit le choix de x_0 .

Rem 29: Si (x_k) converge, elle converge vers la solution de $Ax = b$.

Rem 30: En pratique, M est choisit tel que M^{-1} soit simple à calculer.

Lem 31: (DEV 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\rho > 0$.

Alors il existe $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée à $\|\cdot\|$ telle que $\rho \|A\| < 1$.

Thm 32: (*) converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

B) Méthodes de Jacobi et de relaxation

Def 33: La méthode de Jacobi consiste à prendre M la diagonale de A et $N = M - A$.

Thm 34: Si A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge.

Def 35: Soient D la diagonale de A , $-E$ la partie sous-diagonale, $-F$ la partie sur-diagonale. On appelle méthode de relaxation de paramètre de relaxation $\omega \in \mathbb{R}$ la méthode avec $M = \frac{1}{\omega} D - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$

[2]

Lem 36: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et décomposition régulière $A = M - N$. Si $M + N$ est symétrique définie positive alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Thm 37: La méthode de relaxation converge si et seulement si $\omega \in]0; 2[$

Rem 38: Soit $\omega = 1$, il s'agit de la méthode de Gauss-Seidel

C] Méthodes du gradient

Def 39: La méthode du gradient à pas fixe est définie par $M = \frac{1}{\alpha} I$ et $N = \frac{1}{\alpha} I - A$ pour $\alpha \neq 0$.

Lem 40: (inégalité de Kantorovitch) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $\lambda_{\max} = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda$, $\lambda_{\min} = \min_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda$. Soit $\|\cdot\|_A$ le norme définie par: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_A = \sqrt{x^T A x}$. Alors:

$$\forall x \neq 0, \frac{\|x\|_A^2}{\|x\|_A^2 + \|x\|_A^2} \geq \frac{\lambda_{\max} \lambda_{\min}}{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2}$$

Thm 45: (gradient à pas optimal) Soit A symétrique définie positive. Soit $x^* = A^{-1}b$ et soit $\phi(x) = \frac{1}{2} \|x\|_A^2 - x^T b$. On définit (x_k) par:

$$\begin{cases} x_0 \neq x^* \\ d_k = \frac{\|\nabla \phi(x_k)\|_A^2}{\|\nabla \phi(x_k)\|_A^2} \text{ si } x_k \neq x^*, \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - d_k \nabla \phi(x_k) \end{cases}$$

Alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ et: $\forall k \in \mathbb{N}, \|x_{k+1} - x^*\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \left(\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \right)^k \|x_0 - x^*\|$

IV) Recherche d'éléments propres

A] Localisation des valeurs propres [1]

Thm 46: (de Gershgorin) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Alors $\exists i \in \{1; n\}, |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

Thm 47: (Stabilité des valeurs propres) Soit $A = UDU^{-1}$ diagonalisable $D = \text{diag}(\lambda_i)_{i \in \{1; n\}}$. Soient $\varepsilon > 0, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda(\varepsilon)$ une valeur propre de $A(\varepsilon) = A + \varepsilon C$. Alors:

$$\exists i \in \{1; n\}, |\lambda(\varepsilon) - \lambda_i| \leq \varepsilon \text{cond}_{\infty}(U) \|C\|_{\infty}$$

B] Méthode de la puissance [2]

On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et que ses valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont réelles associées à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres, avec $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_{n-1}| \leq \lambda_n$. On se donne $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de la forme $x_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$, avec $\beta_n \neq 0$ et $\|x_0\| = 1$ on définit (x_k) et (y_k) par:

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^*, y_k = Ax_{k-1} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, x_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k \end{cases}$$

Thm 48: Sous ces hypothèses, on a:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k\| = \lambda_n \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_{\infty} \text{ avec } x_{\infty} = \frac{1}{\beta_n} e_n$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left| \|y_k\| - \lambda_n \right| \leq C \left(\frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|} \right)^k, \|x_k - x_{\infty}\| \leq C \left(\frac{|\lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|} \right)^k$$

Rem 49: A pphquer cette méthode à A^{-1} permet de trouver la valeur propre de plus petit module.

Références:

- ① Analyse numérique (Filibet) [1]
- ② Numerical linear algebra (Allaire) [2]