Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

234

Cadre : $(X,\mathcal{A},\mu)$ désigne un espace mesuré.

I) Intégrale de Lebesgue

A] Intégrale d'une fonction étagée positive

Def 1 : $f:(X,\mathcal{A})\longrightarrow(\mathbb{K},\mathcal{B}(\mathbb{K}))$ est dite étagée si il existe une partition finie $X=\bigcup_{i\in I}A_i$ avec $A_i\in\mathcal{A}$ $\forall i\in I$, et une famille (α_i) de scalaires tels que $f=\sum_{i\in I}\alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$.

Rem 2 : En particulier on peut écrire $f=\sum_{\alpha\in f(X)}\alpha\, \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}$ (forme canonique de f).

Def 3 : Soit f étagée positive. On définit son intégrale par rapport à μ : $\int_X f\,d\mu=\sum_{\alpha\in f(X)}\alpha\,\mu(\{f=\alpha\})$

Prop 4 : Soit $f=\sum_{i\in I}\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ une décomposition comme en def 1. Alors $\int_X f\,d\mu=\sum_{i\in I}\alpha_i\,\mu(A_i)$

Ex 5 : Si $\mu=\delta_a$ la Dirac en a, $\int_X f\,d\delta_a = f(a)$

Si $X=\mathbb{N}$, μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, et si $\{n\in\mathbb{N} \mid f(n)>0\}$ est fini, $\int_X f\,d\mu=\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$

Prop 6 : Soient f, g étagées positives et $\lambda\geq 0$.
- $\int_X (f+\lambda g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \lambda\int_X g\,d\mu$
- $f\le g \Rightarrow \int_X f\,d\mu\le\int g\,d\mu$

Prop 7 : Soit f étagée positive.
- $\forall A\in\mathcal{A}$, $\int_A f\,d\mu=\int_X \mathbb{1}_A f\,d\mu$
- $\forall A,B\in\mathcal{A}$, $A\cap B=\emptyset$, $\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu+\int_B f\,d\mu$
- Si $(E_n)\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est croissante telle que $X=\bigcup_{n\geq 1}E_n$, alors $\int_X f\,d\mu=\lim_{n\to+\infty}\int_{E_n} f\,d\mu$

[1]

B] Intégrale d'une fonction mesurable positive

Thm 8 : (Lemme fondamental d'approximation) Soit $f:(X,\mathcal{A})\longrightarrow\mathbb{R}$ mesurable. Alors f est limite simple d'une suite de fonctions étagées. De plus :
- Si $f\geq 0$, on peut supposer la suite croissante positive.
- Si f est bornée, on peut supposer la convergence uniforme.

Par la suite, soit $f:(X,\mathcal{A})\longrightarrow\mathbb{R}_+$ mesurable.

Def 9 : On définit l'intégrale de f par rapport à μ par :
$$\int_X f\,d\mu=\sup_{\substack{0\le\varphi\le f\\ \varphi\text{ étagée}}}\int_X\varphi\,d\mu\in\mathbb{R}_+$$
f est dit μ-intégrable si $\int_X f\,d\mu<\infty$

Rem 10 : Ceci coïncide avec def 3.

Prop 11 : L'intégrale ainsi définie est croissante.

Thm 12 : (de Beppo-Levi) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions de X dans $\mathbb{R}_+$ mesurables. Si $f_n \xrightarrow{CS} f$, alors $\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu$.

Cor 13 : Si $g:X\to\mathbb{R}_+$ est mesurable et $\lambda\geq 0$ alors $\int_X(f+\lambda g)\,d\mu=\int_X f+\lambda\int_X g\,d\mu$.

Cor 14 : $\int_X f\,d\mu=0 \Leftrightarrow f=0$ μ-presque partout

Cor 15 : Si $g:X\to\mathbb{R}_+$ est mesurable telle que $f=g$ μ-presque partout alors $\int_X f\,d\mu=\int_X g\,d\mu$.

Prop 16 : Si f est μ-intégrable, f est finie μ-presque-partout.

C] Intégrale d'une fonction intégrable

Def 17 : Soit $f:(X,\mathcal{A})\longrightarrow(\mathbb{K},\mathcal{B}(\mathbb{K}))$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. f est dite μ-mesurable si $\int_X|f|\,d\mu<+\infty$. On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ l'ensemble de ces fonctions.

Rem 18 : Si f est μ-intégrable, alors $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = -\min(f,0)$ aussi.

Déf 19 : Si f est réelle et μ-intégrable, on définit son intégrale : $\int_X f\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu$. Dans le cas où f est complexe et intégrable, $\int_X f\,d\mu = \int_X \mathrm{Re} f\,d\mu + i\int_X \mathrm{Im} f\,d\mu$.

Thm 20 : $\begin{array}{rcl}\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_X f\,d\mu\end{array}$ est une forme linéaire. De plus, si $f,g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ vérifient $f \le g$, alors $\int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$.

[1]

Prop 21 : Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. Alors $\left|\int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f|\,d\mu$, avec égalité si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, $f = \alpha|f|$ μ presque partout.

D] Lien avec l'intégrale de Riemann

Soit $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Thm 22 : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a<b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est λ-intégrable et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda$.

Thm 23 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Alors $\int_a^{+\infty} |f|(t)\,dt < +\infty \Leftrightarrow \int_{[a,+\infty[} |f|\,d\lambda < +\infty$ et dans ce cas $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{[a,+\infty[} f\,d\lambda$

II) Principaux théorèmes de convergence et conséquences

A] Convergence dominée

[1]

Thm 24 : (Lemme de Fatou) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\int_X \underline{\lim}\, f_n\,d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n\,d\mu$.

App 25 : Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables qui converge simplement vers f. Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n|\,d\mu < +\infty$ alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Thm 26 : (de convergence dominée) Soient $f : (X,\mathcal{A}) \to (\mathbb{K},\mathcal{B}(\mathbb{K}))$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ tel que $|f_n| \le g$ μ-presque partout pour tout n. Alors $\int_X |f_n - f|\,d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier $\int_X f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f\,d\mu$.

Thm 27 : Soit (φ_n) une suite de fonctions de $(X,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{K},\mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurables.

- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \ge 0$ alors $\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n\right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X \varphi_n\,d\mu$
- Si $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |\varphi_n|\,d\mu < +\infty$ alors $\forall n$, φ_n, $\sum |\varphi_n|$ et $\sum \varphi_n$ sont μ-intégrables et $\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n\right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X \varphi_n\,d\mu$.

B] Application aux intégrales dépendant d'un paramètre.

Soit $f : E \times X \to \mathbb{K}$ où (E,d) est un espace métrique.

Thm 28 : (de continuité) Soit $u_0 \in E$. On suppose $x \mapsto f(u,x)$ mesurable $\forall u \in E$, $u \mapsto f(u,x)$ continue en u_0 μ-presque partout. Si $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\forall u \in E$, $|f(u,x)| \le g(x)$ μ presque partout alors $u \mapsto \int_X f(u,x)\,d\mu(x)$ est définie partout et continue en u_0.

Thm 29 : (de dérivation) On suppose $E = I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $u_0 \in E$. On suppose que :

- $\forall u \in I$, $f(u,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$
- $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)$ existe μ p.p.
- $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ tel que $\forall u \in I$, μ-p.p. :
$$|f(u,x) - f(u_0,x)| \le g(x)|u - u_0|$$

Alors $F(u) := \int_X f(u,x)\,d\mu(x)$ est définie $\forall u \in I$ et est dérivable en u_0 avec $F'(u_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)\,d\mu(x)$

III) Espaces L^p

A] Structure d'espace vectoriel normé

Déf 30 : Soit $p \ge 1$. On définit :

$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p d\mu < +\infty \}$
$\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) = \{ f : X \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid f \text{ est bornée } \mu\text{-presque partout} \}$
et : $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p d\mu}$, $\|f\|_\infty = \inf \{ M > 0 \mid \mu(f > M) = 0 \}$.

Ex 31 : Si μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, on trouve $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) = \ell^p(\mathbb{N})$, $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) = \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Prop 32 : $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^\infty$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Thm 33 : (inégalité de Hölder) Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Alors si $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$, fg est dans $\mathcal{L}^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ avec égalité si et seulement si $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+ \setminus \{(0,0)\}$, $\alpha |f|^p = \beta |g|^q$ μ.p.p.

Thm 34 : (Inégalité de Minkowski) $\forall p \in [1 ; +\infty]$, $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$.

Prop-def 35 : Soit $\sim$ la relation sur $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$: $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ.p.p. On pose $L^p_{\mathbb{K}}(\mu) = \frac{\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)}{\sim}$. Alors $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Thm 36 : (de Riesz-Fisher) C'est en fait un espace de Banach. En particulier, L^2 est un espace de Hilbert.

App 37 : (Lemme de Grothendieck) Si $\mu(X) = 1$ et $1 \leq p < \infty$, soit $F \subset L^p(X)$ un sous-espace vectoriel fermé inclus dans $L^\infty(X)$. Alors F est de dimension finie. DEV 1

B] Convolution et transformation de Fourier

On se place ici sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Def 38 : On appelle convolution de f et g l'application $f * g$ qui à x associe $\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$ là où c'est possible.

Prop 39 : Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g$ existe presque partout et $f * g \in L^1$ avec $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

[3]

Def 40 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$.

Prop 41 : Si $f, g \in L^1$ alors $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$.

Prop 42 : Si $(f, g) \in L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. De plus, $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Def 43 : Une suite (φ_n) d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une approximation de l'unité si :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \geq 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$
- $\forall \delta > 0$, $\int_{|t| \geq \delta} \varphi_n(t) dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Thm 44 : Soit (φ_n) une approximation de l'unité.
1. Si f est continue bornée, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n * f(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$
2. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, $\|\varphi_n * f - f\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

[3]

App 45 : Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Alors $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. En particulier l'image de $L^1 \cap L^2$ par la transformée de Fourier est dans L^2. Cette partie est de plus dense.

Cor 46 : (Théorème de Plancherel) Il existe un unique isomorphisme isométrique de $L^2 \to L^2$ qui prolonge la transformée de Fourier sur $L^1 \cap L^2$

DEV 2

[2]

Références :
- Théorie de l'intégration (Briane-Pagès) [1] + +
- Analyse réelle et complexe (Rudin) [2]
- Objectif agrégation (Beck) [3]