235

Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

# I) Interversion limite-intégrale

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré

## A] Principaux théorèmes d'intégration

Thm 1 : (de Beppo-Levi) Soit $(f_n)$ une suite croissante de fonctions mesurables positives de $(X,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. Alors $f=\lim_{n\to+\infty} f_n$ est mesurable et $\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f \, d\mu$.

Lem 2 : (fondamental d'approximation) Soit $f : X\to\mathbb{R}$ mesurable. Alors il existe une suite de fonctions étagées qui converge simplement vers $f$. Si $f\geq 0$, on peut supposer cette suite croissante. Si $f$ est bornée, on peut supposer la convergence uniforme.

Cor 3 : L'intégration sur les fonctions mesurables positives est linéaire.

Cor 4 : Soit $(f_n)$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu$. [1]

Thm 5 : (Lemme de Fatou) Soit $(f_n)$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors :

$$\int_X \underline{\lim}\, f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu$$

App 6 : Soit $(f_n)$ une suite de fonctions intégrables qui converge simplement vers $f$ telle que $\sup \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$. Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Thm 7 : (de convergence dominée) Soit $(f_n)$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers $f$. On suppose que $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leq g$. Alors :

$\int_X |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier, $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

Rem 8 : Ce théorème s'applique dans le cas de l'intégrale de Riemann sur un segment.

Thm 9 : Soit $(f_n)$ une suite de fonctions mesurable. On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est finie $\mu$-presque partout et est intégrable. De plus,

$$\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu .$$ [1]

## B] Application aux intégrales à paramètre

Soit $(E,d)$ un espace métrique.

Thm 10 : (de continuité sous l'intégrale) Soit $u_0 \in E$. Soit $f : E\times X \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :

⊛ $\forall u\in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable.

⊛ Pour $\mu$-presque tout $x\in X$, $u\mapsto f(u,x)$ est continue en $u_0$

⊛ $\exists g\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\forall u\in E$, pour $\mu$-presque tout $x$ dans $X$, $|f(u,x)| \leq |g(x)|$

Alors $u \mapsto \int_X f(u,x) \, d\mu$ est continue en $u_0$. [1]

Thm 11 : On suppose $E = I$ intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert. Soit $u_0 \in I$. Si $f$ vérifie :

⊛ $\forall u \in I$, $f(u,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$

⊛ $\mu$-presque partout, $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)$ existe

⊛ $\mu$-presque pour tout $x$, $\forall u\in E$, $|f(u,x)-f(u_0,x)| \leq g(x)|u-u_0|$, $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$.

Alors $F(u) := \int_X f(u,x) \, d\mu(x)$ est dérivable en $u_0$ et $F'(u_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u,x) \, d\mu(x)$

## C] Interversion de deux intégrales

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés où $\mu$ et $\nu$ sont $\sigma$-finis. On munit $X\times Y$ de la tribu produit $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et de la mesure produit $\mu\otimes\nu$.

[1] **Thm 12 :** (de Fubini-Tonelli) Soit $f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Alors $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ sont mesurables et :

$$\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_X\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) = \int_Y\int_X f(x,y)\,d\mu(y)\,d\nu(x)$$

**App 13 :** Soit $(a_{n,m})$ une suite indexée sur $\mathbb{N}^2$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}$$

**Thm 13 :** (de Fubini) Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu\otimes\nu)$ alors l'égalité précédente tient toujours.

[4] **App 14 :** La fonction $f$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Elle admet cependant une intégrale impropre : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ DEV 1

# II) Suites et séries de fonctions

## A] Transferts de propriétés des suites de fonctions

[2] **Def 15 :** Soit $(f_n)$ une suite de $X$, ensemble, vers $E$ un espace vectoriel normé. On dit que $(f_n)$ converge uniformément (CU) vers $f : X \to E$ si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

**Thm 16 :** Si $X$ est un métrique, alors si $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue et que $f_n \xrightarrow{CU} f$, alors $f$ est continue.

**Rem 17 :** La CS ne suffit pas : $f_n : x \mapsto x^n$.

**Thm 18 :** Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ et que $f_n \xrightarrow{CU} f$ alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.

**Rem 19 :** Là non plus CS ne suffit pas.

**Thm 20 :** Soit $f_n : [a,b] \to E$ de classe $C^1$. On suppose que $E$ est un Banach et :
- $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $(f_n(x_0))$ converge
- $\exists g : [a,b] \to E$ / $f_n' \xrightarrow{CU} g$

Alors $\exists f : [a,b] \to E$ $C^1$ tel que $f_n \xrightarrow{CU} f$, et $f' = g$.

## B] Cas des séries de fonctions

Soient $X$ un métrique et $E$ espace de Banach. Soit $(g_n)$ suite de fonctions de $X$ dans $E$.

**Def 21 :** $(\sum g_n)$ CS ou CU si les sommes partielles CS ou CU. $(\sum g_n)$ converge normalement (CN) si $\sum_{n=0}^{+\infty} \|g_n\|_\infty < +\infty$.

**Prop 22 :** Si $(\sum g_n)$ converge normalement et que $\forall n\in\mathbb{N}$, $g_n$ continue, alors $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ est continue.

**Prop 23 :** Si $(\sum g_n)$ CN, et $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b g_n(t)\,dt$$

**Prop 24 :** On suppose que les $g_n$ sont $C^1$, que $\exists x_0\in[a,b]$, $(\sum g_n(x_0))$ converge, et que $(\sum g_n')$ CN. Alors $(\sum g_n)$ converge normalement vers une fonction $C^1$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n'$.

## C] Application aux séries entières

**Def 25 :** On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $(\sum a_n z^n)$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle rayon de convergence $R = \sup\{ r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ bornée}\}$.

**Lem 26 :** (d'Abel) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)$ soit bornée.

Alors $\forall r \in ]0; |z_0|[$, $(\sum a_n z^n)$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$.

Cor 26 : $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0,R)$.

Cor 27 : $(\sum n a_n z^{n-1})$ possède le même rayon que $(\sum a_n z^n)$ et $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $C^1$ avec $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$

[2]

Thm 28 : (d'Abel angulaire) Soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R \geq 1$ telle que $(\sum a_n)$ converge. On note $f$ sa somme sur $D(0,1)$. Soient $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D(0,1) \mid \exists \rho \in \mathbb{R}_+, \exists \theta \in ]-\theta_0; \theta_0[, z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$. Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Thm 29 : (Taubérien faible) Soit $(\sum a_n z^n)$ de rayon 1 de somme $f$ sur $D(0,1)$. On suppose que $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = S \in \mathbb{C}$ et que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $(\sum a_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$

DEV 2

# III) Application à l'analyse de Fourier

On note $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions $2\pi$-périodiques continues par morceaux.

## A] Séries de Fourier

Def 30 : Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in C_{2\pi}$. On définit le n-ème coefficient de Fourier par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$

[2]

Prop 31 : Soit $f \in C_{2\pi}$. Alors $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ (égalité de Parseval)

Thm 32 : (de Dirichlet) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2\pi$-périodique $C^1$ par morceaux. On note pour $x \in \mathbb{R}$ $f(x^+) = \lim_{\substack{y \to x \\ >}} f(y)$ et $f(x^-) = \lim_{\substack{y \to x \\ <}} f(y)$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$

## B] Transformée de Fourier

[3]

Def 33 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de $f$ : $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} dt$

Prop 34 : $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est continue bornée et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$

[1]

Prop-def 35 : Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt$ existe presque partout. $f*g$ est appelé convolution de $f$ et $g$

Prop 36 : $\forall (f,g) \in L^1(\mathbb{R})^2$, $f*g \in L^1$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Prop 37 : $\forall (f;g) \in L^1(\mathbb{R})^2$, $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$

[3]

Thm 38 : Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $h \in \mathbb{R}$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_h(x) = f(x-h)$. Alors $h \mapsto f_h$ est continue.

[1]

Cor 39 : (Lemme de Riemann-Lebesgue) $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim_{x \to +\infty} \hat{f}(x) = 0$

[3]

Thm 40 : (Formule d'inversion) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. On a alors pour presque tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$

App 41 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} = 0$ alors $f = 0$ presque partout.

Références :


- Théorie de l'intégration (Briane - Pagès) [1]
- Analyse (Gourdon) [2]
- Analyse réelle et complexe (Rudin) [3]
- Calcul intégral (Candelpergher) [4]