236

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

I) Méthodes internes

A] A partir d'une primitive

Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

[T]

Thm 1: Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Alors $F: x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est C^1 et $\forall x\in[a,b]$, $F'(x)=f(x)$.

Cor 2: Si $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ est primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$.

Ex3: Si $a=1$, $b>1$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\int_1^b \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$ si $\alpha\neq 1$, $\int_1^b \frac{dt}{t} = \ln(b)$. En particulier, $t\mapsto\frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $\alpha>1$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$

Ex4: $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$

Ex5: Pour intégrer une fraction rationnelle, on effectue une décomposition en éléments simples: $\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$ donc $\int_1^x \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{4}$ $\forall x>1$.

Ex6: Si $f(x)=\cos^4(x)$, on linéarise: $f(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$ et on connait ainsi une primitive.

B] Intégrations par parties (IPP)

[T]

Thm 7: Soient $u,v:[a,b]\to\mathbb{C}$ de classe C^1. Alors
$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Ex8: Soit $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin(t)^n dt$ la suite des intégrales de Wallis. Une IPP donne $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$ donc, sachant que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1=1$, on calcule explicitement I_{2p} et I_{2p+1}.

[G]

Ex9: $\forall x>1$, $\int_1^x \ln(t)dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t}dt = x\ln x - x + 1$.

Ex10: Soit $\forall x>0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ d'où $\Gamma(n+1) = n!$

C] Changement de variable (CDV)

[S]

Thm 11: Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi: U\to\mathbb{R}^n$ injective et différentiable. Alors $V=\varphi(U)$ est mesurable et $f\in L^1(V) \Leftrightarrow |\det Jac_y(\varphi)|\, f\circ\varphi\in L^1(U)$ et alors:
$$\int_V f = \int_U f(\varphi(y))\,|\det Jac_y(\varphi)|\,dy$$

[T]

Cor 12: Si $\varphi:[a,b]\to I$ est C^1 et $f:I\to\mathbb{R}$ est continue alors $\int_a^b f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$

Rem 13: En pratique, on rencontre souvent le CDV polaire: $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r\in\mathbb{R}_+^*$, $\theta\in]0;2\pi[$.

Ex14: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

Ex15: Si $f(t) = \sin^m(t)\cos^n(t)$ avec $n=2p+1$, on réalise le CDV $u=\sin(t)$ pour avoir $\int f = \int t^m(1-t^2)^p dt$

Ex16: On utilise beaucoup en pratique, en posant $t=\tan(\frac{x}{2})$: $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$ pour se ramener à une fraction rationnelle: $\int\frac{dx}{\sin(x)} = \log|\tan(\frac{x}{2})|$

D] Théorèmes de Fubini

[Z]

Thm 17: (Fubini-Tonelli) Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finies et $f: X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Alors $x\mapsto\int_Y f(x,y)d\nu(y)$ et $y\mapsto\int_X f(x,y)d\mu(x)$ sont mesurables et $\iint_{X\times Y} f\, d\mu\otimes\nu = \int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$

[2] **Thm 18 :** (de Fubini) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu\otimes\nu)$ alors $y \mapsto f(x,y)$ et $x \mapsto f(x,y)$ sont intégrables presque partout, de même que $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ et :

$$\iint_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X\left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

[1] **Ex 19 :** L'exemple 14 utilise Fubini-Tonelli

Ex 20 : (Intégrale de Dirichlet) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable en $+\infty$. Cependant, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

II) Méthodes externes

A] Utilisation des suites

Thm 21 : (Beppo-Levi) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives et $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

[2] **Thm 22 :** (Convergence dominée) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Si $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n| \le g$ p.p alors $\int_X f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f\,d\mu$

Ex 23 : Soit $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\,dx$. Alors :

$$I_n(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{sinon.} \end{cases}$$

[4] **Ex 24 :** Soit $\forall z \in \Omega_0$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ où $\Omega_0 = \{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Alors Γ se prolonge holomorphiquement sur $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$ et on a la formule de Weierstrass : $\forall z\in\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$, $\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z}\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{z+k}$ DEV1

B] Utilisation de l'analyse complexe

[1] **Thm 25 :** (Formule de Cauchy) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R>0$. Alors :

$$\forall r\in]0,R[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = 2\pi r^n a_n.$$

En particulier, $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,d\theta = 2\pi a_0$.

Cor 26 : (égalité de Parseval) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$

[3] **Thm 27 :** (des résidus) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et f méromorphe sur Ω. Soit A l'ensemble de ses pôles. On suppose que γ est un lacet ne rencontrant pas A. Alors $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in A} \operatorname{Res}(f,a)\operatorname{Ind}_\gamma(a)$

App 28 : (DEV2) (Formule des compléments)

$$\forall z\in\mathbb{C},\ 0<\operatorname{Re} z<1 \Rightarrow \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Ex 29 : $\forall n \ge 2$, $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$ ⚠ Erreur dans le Rudin

C] Intégrales à paramètre

[2] **Thm 30 :** Soient $u_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}\times X \to \mathbb{R}$. On suppose que $\forall u\in E$, $x \mapsto f(u,x)$ est mesurable, $u \mapsto f(u,x)$ est continue en u_0 p.p et $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\forall u\in E$, $|f(u,x)| \le g(x)$ p.p. Alors $u \mapsto \int_X f(u,x)\,d\mu(x)$ est continue en u_0.

Thm 31 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert. Si $\forall u\in I$, $f(u,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$, si $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)$ existe p.p. et $\exists g\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\forall u\in I$, $|f(u,x) - f(u_0,x)| \le g(x)|u-u_0|$ p.p alors

[2] $F : u \longmapsto \int_X f(u,x)\,d\mu(x)$ est dérivable en u_0 et $F'(u_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,x)\,d\mu(x)$.

Ex 32 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\xi t}\,dt$ sa transformée de Fourier. Alors $\hat{f}$ est continue, et si $x \mapsto x f(x) \in L^1$, $\hat{f}$ est C^1.

[3] **Ex 33 :** Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Alors $\hat{f}$ est C^1 et vérifie $\hat{f}'(t) = -\frac{1}{2} t \hat{f}(t)$ d'où $\hat{f}(t) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{t^2}{4}}$.

Ex 34 : (Formule d'inversion) si f et $\hat{f}$ sont dans L^1, alors $\hat{\hat{f}} = 2\pi f(-\cdot)$.

III) Méthodes d'approximation

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

[1] **Thm 35 :** Soit $\sigma : x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de pas $|\sigma| = \max |x_{i+1} - x_i|$ et soit (ξ_i) une famille de réels tels que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_i \in [x_i ; x_{i+1}]$. On pose $S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$, tel que pour toute subdivision σ vérifiant $|\sigma| < \alpha$, on ait $\left| \int_a^b f(t)\,dt - S(f,\sigma,\xi) \right| < \varepsilon$.

[6] **Meth 36 :** On prend une subdivision $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ de $[a,b]$. Alors $\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(t)\,dt$. On approxime ensuite $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(t)\,dt$ par $\sum_{j=0}^{\ell} \omega_j f(\xi_{i,j})$ où $\xi_{i,j}$ sont des réels de $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et $\sum_{j=0}^{\ell} \omega_j = 1$, $\ell \geq 0$ fixé.

[5] **Ex 37 :** Méthodes des rectangles :

à gauche $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\alpha_i)$

à droite $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\alpha_{i+1})$

Ex 38 : Méthode des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \frac{f(\alpha_i) + f(\alpha_{i+1})}{2}$$

[6] **Def 39 :** Une méthode de quadrature est d'ordre $n \in \mathbb{N}$ si elle est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ et inexacte sur un élément de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Ex 40 : Les méthodes des rectangles sont d'ordre 0. La méthode des trapèzes est d'ordre 1.

Thm 41 : Soit $E(f)$ l'erreur commise. Si la méthode est d'ordre $n \in \mathbb{N}$ et que f est C^{n+1} alors $\exists C > 0$, $|E(f)| \leq \frac{C}{n!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$

App 42 : Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes de résolutions approchées d'EDO consistants à utiliser des méthodes de quadrature.

Références :

- Analyse, Gourdon [1]
- Théorie de l'intégration (Briane-Pagès) [2]
- Analyse réelle et complexe, Rudin [3]
- Éléments d'analyse (Queffélec et Zuily) [4]
- Objectif agrégation (Beck) [5]
- Analyse numérique, Demailly [6]