239

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications

I) Etude de la régularité

Dans cette partie, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré. Soit E un espace métrique.

A] Continuité

[2]

<u>Thm 1</u> : Soit $f : E \times X \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

- $\forall x \in E$, $t \longmapsto f(x,t)$ est mesurable.
- $x \longmapsto f(x,t)$ est continue en $x_0 \in E$ pour presque tout t
- On a l'hypothèse de domination : il existe g positive, intégrable telle que $\forall x \in E$, pour presque tout t, $|f(x,t)| \leq g(x)$

Alors $x \longmapsto \int_X f(x,t)\,d\mu(t)$ est continue en x_0.

<u>Cor 2</u> : Si on remplace l'hypothèse 2 par "continue sur E" alors $x \longmapsto \int_X f(x,t)\,d\mu(t)$ est continue sur E.

<u>Ex 3</u> : $F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ est continue sur $]0;+\infty[$ (et même en 0)

<u>Rem 4</u> : Si E est localement compact, puisque la continuité est une propriété locale, on peut montrer l'hypothèse de domination sur un compact de E.

<u>Ex 5</u> : $f(x,t) = x e^{-xt}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^2$, mais $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+} f(x,t)\,dt$ n'est pas continue.

B] Dérivabilité

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

[2]

<u>Thm 5</u> : Soit $f : I \times X \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

- $\forall x \in I$, $t \longmapsto f(x,t) \in L^1_\mu(X)$
- $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe pour presque tout t
- $\exists g \in L^1$, $g \geq 0$ telle que $\forall x \in I$, pour presque tout t, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(x)$

Alors $F : x \longmapsto \int_X f(x,t)\,d\mu(t)$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,d\mu(t)$$

[2]

<u>Rem 6</u> : Ici aussi on peut montrer l'hypothèse de domination sur tout compact.

<u>Rem 7</u> : Si pour presque tout t, $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue, alors F est C^1.

<u>Cor 8</u> : On a un analogue dans le cas C^k en dominant chaque dérivées partielles.

[1]

<u>Ex 9</u> : Soit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ pour $x > 0$. Alors Γ est C^∞ sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log(t))^n e^{-t} t^{x-1}\,dt$

<u>Ex 10</u> : L'exemple 5 donne une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, mais F n'est pas dérivable.

C] Holomorphie

Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$.

[2]

<u>Thm 11</u> : Soit $f : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- $\forall z \in \Omega$, $t \longmapsto f(z,t) \in L^1$
- $z \longmapsto f(z,t)$ est holomorphe pour presque tout t.
- $\exists g \in L^1$ positive telle que $\forall z \in \Omega$, pour presque tout $t \in X$, $|f(z,t)| \leq g(t)$

Alors $F : z \longmapsto \int_X f(z,t)\,d\mu(t)$ est holomorphe sur Ω et $\forall z\in\Omega,\ F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,d\mu(t)$

[2] App 12: (DEV 1) Soit $\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ la fonction Gamma d'Euler. Alors Γ définit une fonction holomorphe sur $\Omega_0=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z>0\}$. De plus, Γ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$ et vérifie la formule de Weierstrass : $\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$

II) Produit de convolutions de deux fonctions

A] Définitions et propriétés

Soient f,g mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$.

[2] Def 13: On définit le produit de convolution de f par g par : $\forall x\in\mathbb{R}^d,\ f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,dt$

Ex 14: $f*0=0$, $f*1=\|f\|_1$

Rem 15: $f*g$ est bien définie dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Prop 16: Le produit de convolution pour les fonctions mesurables positives est commutatif et associatif.

[4] On suppose maintenant f et g à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On cherche des conditions d'existence et de régularité de $f*g$.

Prop 17: $x\longmapsto f(y-x)g(x)\in L^1$ si et seulement si $|f|*|g|(y)<\infty$

Prop 18: Si $f,g\in L^1$ alors $f*g$ est définie presque partout et $\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$. En particulier, $f*g\in L^1$.

Cor 19: $\forall f,g\in L^1$, $\int f*g\,d\lambda=\int f\,d\lambda\times\int g\,d\lambda$

Thm 20: Soient $f\in L^p$, $g\in L^1$ où $1\le p\le\infty$. Alors $f*g$ existe presque partout et : $\|f*g\|_p\le\|f\|_p\|g\|_1$. En particulier, $f*g\in L^p$.

Thm 21: Soient $p,q\in[1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Soient $f\in L^p$ et $g\in L^q$. Alors $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}^d$ et uniformément continue. De plus, $\|f*g\|_\infty\le\|f\|_p\|g\|_q$.

Prop 22. Soient $f\in L^1_{loc}$ et $g\in L^\infty$ à support compact. Alors $f*g$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^d$.

Thm 23: Soit $k\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{N}^d$. Soient $f\in C^k$ à support compact et $g\in C^1$. Alors $f*g\in C^k$ et :

$|\alpha|\le k \Rightarrow \partial^\alpha(f*g)=(\partial^\alpha f)*g$

B] Approximation de l'unité

Rem 24: Il n'existe pas d'élément neutre pour $*$ dans L^1. Pour pallier à ce problème, on définit les approximations de l'unité :

Def 25: On appelle approximation de l'unité toute suite (φ_n) de L^1 telle que :

⊛ $\forall n\in\mathbb{N},\ \varphi_n\ge 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_n=1$.

⊛ $\forall \delta>0\ \int_{|x|>\delta}\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Prop 26: Soit $\varphi\in L^1$ positive telle que $\int\varphi=1$. On pose $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}^d,\ \varphi_n(x)=n^d\varphi(nx)$. Alors (φ_n) définit une approximation de l'unité.

Ex 27: $\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ donne une approximation de l'unité. Sur $\mathbb{R}^d$, on peut prendre $\varphi(x)=(2\pi)^{-d/2}e^{-\frac{|x|^2}{2}}$

[4] **Thm 28 :** Soient $p \in [1;+\infty[$ et $f \in L^p$. Soit (ϕ_n) une approximation de l'unité. Alors $f * \phi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} f$

Rem 29 : Ceci justifie l'appellation de (ϕ_n).

Rem 30 : Ce résultat est faux pour $p=\infty$

Thm 31 : Si $p=\infty$ et f est continue, alors $f*\phi_n$ converge uniformément vers f sur tout compact.

[2] **App 32 :** (Théorème de Féjer) Soit $K_N(x) = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right|^2$ le noyau de Féjer. Soit $f \in C^0_{2\pi}$. Alors $f*K_N \xrightarrow{CU} f$.

[6] **App 33 :** (DEV 2) Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. L'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ admet une unique solution u de $]0;+\infty[\times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\|u(t,\cdot)-u_0\|_{C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

[4] **Def 34 :** Une approximation de l'unité (ϕ_n) est dite régularisante si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \in C_c^\infty$

Ex 35 : $\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{si } |x|\geq 1 \end{cases}$ donne une suite régularisante.

App 36 : $\forall p \in [1;+\infty[$, C_c^∞ est dense dans L^p.

III) Transformation de Fourier

[2] **Def 37 :** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit sa transformée de Fourier par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt$

[3] **Ex 38 :** Si $H(x) = e^{-|x|}$, $H_\lambda(x) = H(\lambda x)$ pour $\lambda>0$, alors $\hat{H}_\lambda(x) = \frac{2\lambda}{\lambda^2+x^2}$

Prop 39 : Soient $f, g \in L^1$. Alors $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$. La transformation de Fourier transforme donc la convolution en produit.

[2] **Prop 40 :** $\forall f \in L^1$, $\hat{f} \in C^0$

Thm 41 : (de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1$. Alors $\lim_{x\to\pm\infty} \hat{f}(x) = 0$

App 42 : Si $c_n(f)$ est le n-ème coefficient de Fourier de f alors $\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0$.

[3] **Thm 43 :** Soit $f \in L^1$ telle que $x \mapsto xf(x) \in L^1$. Alors $\hat{f}$ est C^1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}'(x) = \widehat{-i\xi f(\xi)}(x)$

[2] **App 44 :** Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Alors $\hat{f}(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{x^2}{4}}$

[3] **Thm 45 :** (Formule d'inversion) Soit $f \in L^1$ telle que $\hat{f} \in L^1$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$.

Cor 46 : La transformée de Fourier est injective dans L^1.

Références :

- Analyse, Gourdon [1]
- Eléments d'analyse, Queffélec - Zuily [2]
- Analyse réelle et complexe, Rudin [3]
- Théorie de l'intégration - Briane-Pagès [4]
- Eléments d'analyse fonctionnelle, Hirsch - Lacombe [5]
- Calcul intégral, Candelpergher [6]